Oughtredus explicatus,

SIVE

COMMENTARIUS

IN

Ejus Clavem Mathematicam.

Cui additæ sunt

Planetarum Observationes

&

Horologiorum Constructio.

Authore

GILBERTO CLARK.

LONDINI,

Typis *Milonis Flesher*; Veneunt apud *Ric.* D[illegible]is, Bibliopolam *Oxoniensem*, 1682.

ILLUSTRISSIMO VIRO

&

Domino meo Colendissimo,

JUSTINIANO ISHAMO,

BARONETTO,

EX

Antiqua *ISHAMORUM* Gente,

IN

Agro *Northamptoniensi* oriundo;

Hanc suam

Clavis Mathematicæ Interpretationem,

In testimonium tum observantiæ suæ,

Tum inprimis gratitudinis,

D. D. D.

Gilbertus Clark.

AD JUVENES ACADEMICOS.

ID mihi præcipue in hoc Scripto proposui, ut vos (Academici Ornatissimi) *Oughtredum* nostrum, tantum virum, sine alio Tutore, intelligeretis; utrum vero scopum meum attigerim, iis qui experimentum fecerint, judicandum relinquo: nollem equidem studia vestra majoris momenti nimium interpellare; nam hæc nostra, ut non sunt lucrosa, ita nec æque necessaria, atque linguarum peritia & veri nominis philosophia, præsertim quod ad eos attinet, quibus Theologiam practicam rure, exercere propositum est; interim ornamento cuivis esse possint, imo necessaria usque adeo ut in nullo genere viri magni nomen mereatur, qui in Mathematicis non sit aliquantulum versatus; ecquam ridiculum est, quod grandes Metaphysicorum Magistri nesciant qua arte extrahenda sit Radix quadrata, vel solvenda Æquatio quadratica, utrum in Triangulo rectilineo, tres anguli æquales sint duobus rectis; quot Circuli in Sphæra, &c. Quandoquidem in cujusvis Academici, ludentis potius quam studentis potestate situm est, sine multo temporis dispendio hæc omnia & longe majora consequi. Ego igitur in commune subsidium scripsi has Annotationes, quæ ad umbilicum perductæ sunt, &

 missæ

missæ (in hac quam videtis forma, ante annos viginti, ut publici juris fierent·) ad Typographum, sed ille me fefellit; ideoque pulveri & æternis tenebris eas mandassem, nisi Dominus *Zacheus Ishamus*, Ædis *Christi* Alum. Vir omnigena eruditione refertus, mihi animos addidisset, easque quasi ab orco revocasset; nempe ille quum forte fortuito legisset Præfatiunculam ante Philosophicam Disputationem quam anno 1662 edidi adversus Virum doctissimum, *Franciscum Linum*, & in qua hujus Scripti mentionem aliquam feci; per nuncium illico mihi significavit, Academicis gratum futurum *Oughtredi* Interpretem Latinum, qui brevi Libro, Authoris tam Canonici Vestigia, κατὰ πόδας premeret, seque ipsum suscepturum, ut Annotationes prælo excuderentur; obsequutus sum votis ejus, qui fidem suam liberavit; ideoque & illi gratiæ debentur, si quæ forte ex hoc Opusculo deberi videantur: Sciatis autem quod ego, destinata opera sparsim variis locis, inserui, non modo quæ ad *Oughtredum* intelligendum necessaria essent, verum etiam quæ *Cartesianæ* Geometriæ & Astronomiæ facem præferrent; hujusque ratione Appendicem Astronomicam una imprimendam curavi: utroq; Libello fruimini, Optimi Juvenes, & *valete*.

PRO-

PROLOGUS AUTHORIS.

Patres, Virosque quotquot undiquaque, vel
In Universitate, sive in Urbe sint,
An Aulici sient, sientve Rustici,
Rogabo, maximeque Cantabrigiæ,
Domusque Sidniensis, *Arbitros probos,*
Episcoposque, Præsulesque candidos,
Quibus data est tremenda Clavis οὐρανῶν,
Rogabo, Clavis ut mea Explicatio
Ab omnibus recepta sit benigniter,
Amentque me, prout bonos amaverint.

G. C. *Coll.* Sidneiani.

Ad Interpretem.

Gaudete, O Numerique Lineæque!
Et quantum est hominum Algebraicorum,
Clavis quam fabricavit & polivit,
Solertissimus ille disciplinæ
Oughtredus *Pater: En tuo labore*
Docta est, Clerice, *dimovere claustra,*
Et claram facere omnibus mathesin.

R. Richardson. *Coll.* Eman.

In Authorem.

OUghtredi *insignem late ornat fama laborem,*
Teque tuum, Interpres, nobilitabit Opus.
Multa obscura prius dum tam manifesta dedisti,
Lectoris labor, at non tua fama, minor.

R. G.

In *Oughtredum* Explicatum.

A*Vthor & Interpres numeris meruere, sed*
Deficit ille suis, deficis ipse tuis. (audi,
Ambos tentavi, nec sufficit Algebra laudes
Enumerare suas, enumerare tuas.

Joh. Courtman. *Aul.* Clar.

L*Inea quæ dudum Serpentis more voluta,*
Mira tortilibus flectitur arte modis,
Abjicit exuvias, monstrat se clarius orbi,
Nec quæ spectari digna latere sinit.

M. Courtman. Trin. *Coll.* Cantab.

Ad Authorem Carmina poscentem Epilogus.

C*Armina à me vis? neque sum Poeta,*
Nec sagax (ut scis) analysta; præsto
Sapphicum hoc unum, puta præstitum quod
Postulat Author.

G. C.

Ought-

Oughtredus explicatus,

SIVE,

COMMENTARIUS

IN

Clavem Mathematicam *Oughtredi*.

CAP. I. *De Notatione.*

§. 1.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$, &c.
M	M	M	M	M	M	M	C	X	I	X	C	M	M	M	M	M	M	M
M	M	M	M	C	X	I							X	C	M	M	M	M
M	C	X	I													X	C	M

PRO notatione numerorum, primâ facie exhibet hæc Tabella uniuscujusque numeri suum sibi proprium characterem, ità, &c. 4 3 2 1 0 . $\bar{1}\,\bar{2}$, &c. pro computatione; vides hîc duos numerorum ordines descriptos, *viz.* superiorem unum, figuris numeralibus, &c. 3 2 1 0; inferiorem alterum, literis numeralibus Romanis, &c. C X I.

Superior constat ex numeris ab unitate arithmeticè proportionalibus, *viz.* quorum differentia est æqualis;

 nempe

nempe differentia inter 1 & 2 eſt unitas, pariter differentia inter 2 & 3 eſt etiam unitas.

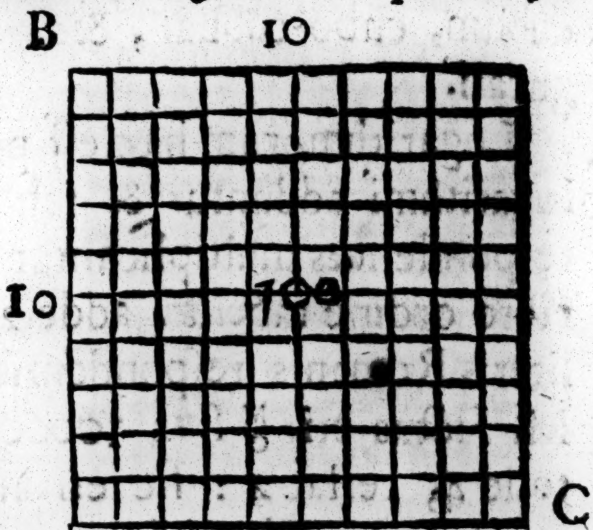
Inferior ordo conſtat ex numeris (continuè multiplicando per X) ab unitate geometricè proportionalibus, *viz.* quorum quotientes ſunt æquales, nimirùm quoties C eſt in M toties X in C, & toties unitas in X, *ſcil.* decies.

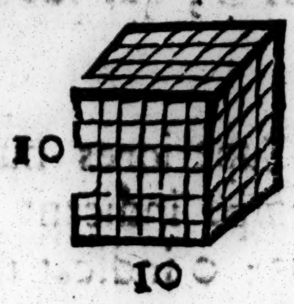
Inferior ordo computationi per numeros communes inſervit, indicando valorem uniuſcujuſque figuræ pro ratione loci quem obtinet; nempe primus locus eſt μονάδων, ſive unitatum, I; ſecundus, δεκάδων, X; tertius, ἑκατοντάδων, C, &c. & poſt quaſque tres literas factâ lineâ perpendiculari, ut vides in Tabella, ita, &c. M | C X I; primus ſecundi ternionis eſt millium, primus tertii ternionis eſt millies millium, & ſic deinceps: vel, commate facto, ſcribe in hunc modum, 978,923,456. altera Tabellæ pars quæ ſequitur cyphram o, & lineam ſeparatricem, ità, $\overset{0}{\text{I}}\,\overset{\bar{1}}{\text{X}}\,\overset{\bar{2}}{\text{C}}\,\overset{\bar{3}}{\text{M}}$, &c. utilis eſt ad fractionum (quas hîc partes appellat) computationem: inferior ordo denominatoris vicem obtinet, & oſtendit in quot partes unitas dividatur, ut, X C M, &c. ſuperior numeratoris officio fungitur, & oſtendit quot ex illis partibus ſumendæ ſunt, ut, $\frac{1}{X}$ ſive $\frac{1}{10}$, id eſt, una pars decima, vel ſi unitas in decem partes frangatur, quòd ſumenda eſt una tantùm ex illis; ſi $\frac{5}{10}$ tum quinque ex illis ſumendæ: in hac parte obſervare debes lineolas ſupra figuras, ità, $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$, &c. quibus ſignificatur numeros illos eſſe partes ſive fractiones, ſive negativos, id eſt, unitate minores, nam tota hæc fractio $\frac{99999999}{100000000}$ non valet unam (ut ità dicam) unitatem,

ſed

ſed ſi unitas dividatur in 100000000 partes, erunt ex illis ſumendæ 99999999; inſervit etiam hæc tabella numeris figuratis: ſed quid eſt numerus figuratus?

Reſpondeo. Diximus inferiorem ordinem conſtare ex numeris geometricè proportionalibus; & in progreſſione, I in loco unitatum cujus index o eſt numerus (ut ſic loquar) abſolutus, X cujus index 1 eſt radix, C cujus index 2 eſt numerus quadratus; M eſt cubus cujus index 3: $\frac{M}{X}$ ſive 10000 eſt quadrato-quadratus, cujus index 4 ſequitur quadrato-cubus, & hunc reliquæ poteſtates deinceps; appellantur autem hi numeri figurati, nomine ducto à geometricis figuris in quibus jacent. Multiplica 10 per 10, & factus erit 100. Hîc vides 100 minora quadrata contineri intra magnum quadratum cujus latus ſive radix eſt 10. Si iterum factum hunc 100 multiplices per eundem numerum 10, factus erit 1000, qui erit ſolidum ſive cubus. Et in magno cubo, cujus latus 10, habebis 1000 minores cubos.





Jacent & alii numeri in figuris, ut ex 3 in 6 fit 18,

3

6

qui tamen numerus 18 non eſt quadratus; at cum iſtiuſmodi figuratis numeris nobis hoc loco nihil agendum: ſunt quidam numeri (qui primi appellantur) ut 3, 5, 7, 11, 13, &c. & in nullis figuris reperiuntur: ſed ſcire præſtat, quòd quamvis in Geometria atque in rerum natura ultra lineam, ſuperficiem & ſolidum nulla detur magnitudo; in Arithmetica tamen multiplicando continuè procreamus inſuper quadrato-quadratum, quadrato-cubum, cubo-cubum, &c. qui ſunt etiam numeri figurati.

Logarithmorum hæc eſt proprietas, quod prout ipſi logarithmi adduntur & ſubtrahuntur, ita numeri illis reſpondentes multiplicantur & dividuntur; ita in ſuperiore ordine tabellæ, adde 2 ad 3, ſumma eſt 5, ſic in literis Romanis reſpondentibus, multiplicando C per M, factus erit $\overset{M}{C}$ ſive 100000; ita ſubtrahendo, ex 6 tolle 4, reſtat 2: ſic etiam divide $\overset{M}{M}$ per M, quotiens erit C, qui ſub 2 pingitur.

§. 2.

Superiores numeri ſunt indices ſive exponentes, nempe indicant numerorum denominationes ſive gradus: o indicat numerum abſolutum: ſic 5 N ſignificat quinque unitates; & ideo dicitur abſolutus, quia æſtimatur ſolummodo ab unitatibus quas continet, ſine ullo alio reſpectu, ut ſit vel radix vel quadratum, &c. alterius alicujus numeri.

1. Indicat

1. Indicat radicem quæ in tabella eſt 10, X, una dimenſio.

2. Indicat quadratum; ut C, ex duabus dimenſionibus, ſive ex X, multiplicato per X.

3. Indicat cubum, ut M ex tribus dimenſionibus conſtantem, *ſcil.* ex X in X in X continuè multiplicando; & ſic deinceps.

Eſtque progreſſio in decupla ratione verſus ſiniſtram, certè ita habetur in omnibus quos vidi codicibus, at minùs rectè: eſt enim I ad X verſus ſiniſtram ratio ſubdecupla, & pariter in fractionibus $\frac{1}{10}$ eſt ad 1 in ratione ſubdecupla; atque in eadem eſt $\frac{1}{100}$ ad $\frac{1}{10}$.

4. Tabella in decimali ratione ordinatur; nonnunquam reducendæ ſunt communes fractiones ad decimales, ut hæc fractio communis $\frac{4}{5}$ æque valet atque decimalis $\frac{8}{10}$ ad quam ergo illa reduci poſſit; hujuſmodi reductiones quandóque ſunt ſatis operoſæ, ideóque commodè evitantur, præſertim operando per ſinus & tangentes, ubi præſtat ut radius ſive ſemidiameter ſit 1,00000, id eſt, 1 cum circulis ſive cyphris annexis, ut in ſinuum tabulis videre potes.

6. Non ſcribes partes decimales ita $\frac{5}{10}$ $\frac{56}{100}$ $\frac{56}{1,000}$ ſed brevitatis & concinnitatis causâ, ita, $0|\underline{5}$ $0|\underline{56}$ $0|\underline{056}$ vel, ſi placet, ita, $\cdot|\underline{5}$ $\cdot|\underline{56}$ $\cdot|\underline{\cdot 56}$

7. In hoc numero $0|\underline{500}$ linea ſeparatrix oſtendit illum eſſe fractionem, & duæ cyphræ poſt figuram 5 ſunt prorſus ſupervacaneæ atque ac ſi abeſſent, ita $0|\underline{5}$

12. Quod attinet ad uſum ſignorum + & — tum etiam pl. & min. magna differentia eſt attendenda, quam ita accipe; 4 eſt numerus ſimplex, at 4 + 3 eſt numerus compoſitus, & valet 7: jam ſi dicam 8 +

quadr. 4 + 3 intelligo 27: quadratum enim ex 4, hoc est, 16, per se accipio.

Sed si dicam 8 pl. quadr. 4 + 3 intelligo 57, quia 4 + 3 conjunctim valent 7, cujus quadrat. est 49.

13. A B C, &c. literæ alphabeti vocantur species, vel symbola, unde hæc arithmetica speciosa appellatur, potes characteres quos velis usurpare; verùm eliguntur literæ alphabeti, utpote familiares & notissimæ.

14. Speciosa arithmetica optimè inservit potestatum & æquationum analysi, quâ radices eruuntur è potestatibus ex retrograda, quæ omnino cernitur compositionis sive geneseos viâ; & in hac arte quanquam quæsitum est naturâ posterius noto, incipis tamen in problematibus resolvendis à quæsito sive ab ignoto, ac si notum esset, ut infra planiùs intelliges.

Ex 3 multiplicato per 4 fit 12, sed in his figuris apparet neque 3 neque 4, quin penitùs absorbentur; sed si pro 3 statuas A, & pro 4 statuas B, certè ex A multipl. per B fit AB, ut infra intelliges, ubi in producto vides utrumque factorem, *scil.* tum A tum B scire debes quòd in omnibus ferè artibus & scientiis quædam per anticipationem dicuntur; ideóque quomodo ex hoc mòdo operandi nempe per species fiunt theoremata generalia intelliges ad Cap. 11. ubi ingentem theorematum cumulum habebis.

CAP.

CAP. II. *De Additione.*

§. 3.

3794	236
584	3
947	08
4720	7439
48	5
10094	8599

IN hoc exemplo fractiones omnes ſunt decimales; |236 valet $\frac{236}{1000}$, |08 valet $\frac{8}{100}$ atque omnes additæ faciunt 18599, unde unitas in memoria reſervatur aſportanda ad integros proximi ordinis, *ſcil.* in locum unitatum: atque hæc eſt fractionum decimalium utiliſſima proprietas; quòd ſine mora tranſeant ad integros, ratio eſt, quia $\frac{1}{100}$ decies continetur in $\frac{1}{10}$, & $\frac{1}{10}$ decies continetur in unitate: nam $\frac{10}{100}$ valent $\frac{1}{10}$ & $\frac{10}{10}$ valent unitatem.

§. 4.

Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas, ſervatis ſignis, ad 3A adde A, ſumma eſt 3A + A, hoc eſt, 4A, cogitare debes ſignum + præfixum ipſi A, per Sect. 11. prioris Cap. ac ſi ſcriptum eſſet, ad 3A adde + A, tum etiam concipere potes unitatem affixam ipſi A, (nam A valet 1A) ac ſi ſcriptum eſſet, ad 3A adde + 1A, ſed 3A & 1A ſunt 4A.

Ad 5A adde—3A, ſumma eſt 5A—3A, hoc eſt, 2A; dices, quare 2A? ratio eſt, quia propter —3A ſub ſigno negativo expungere debes æqualem partem ex 5A affirm. *ſcil.* expungere debes 3A ex 5A, ideóque habebis tantùm 2A pro ſumma.

Ad A adde A, ſumma erit A + A, hoc eſt, 2A, ſed

si ad A addas —A, summa erit A—A, hoc est, o, quia una species expungit alteram.

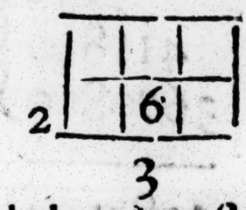
In indicum additione, ad 3 adde $\bar{2}$, summa est 1, & ad $\bar{3}$ adde 2 summa est $\bar{1}$; observare debes lineolas negativas supra figuras, ità $\bar{2}\bar{3}1$ hinc expungendum, ut ante.

CAP. III. *De Subductione.*

§. 4.

SUbductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam mutatis omnibus signis magnitudinis subducendæ, ex 5A tolle —3A, restat 5A + 3A, mutato signo — in signum +: restat inquam 5A + 3A, hoc est, 8A, atque ex his vides quòd si tollas —, idem evenit ac si adderes +; & si tollas +, idem evenit ac si adderes —: nam ad 5A adde —3A, sum. est 2A, ut in priore Capite; & ex 5A tolle + 3A, restat 5A—3A, hoc est, 2A. Per hanc Sectionem, magnitudines compositæ quandóque subducuntur per signum mi. quod valet minus; & tum reliqua servantur signa, ut ex A + E tolle B—C + D, restat A + E. min. B—C + D.

CAP. IV. *De Multiplicatione.*



1. SI multiplices 2 per 3 fit 6, qui eſt factus ſive rectangulum, atque 2 & 3 ſunt factores ſive latera rectanguli, ut in Figura.

2. 3. & 4. In Multiplicatione maxime habenda eſt ratio locorum in quibus ponendi ſunt particulares facti ex ſingulis unius numeri figuris ductis in ſingulas alterius, ut ſi multiplices 4576 per 892, incipere debes ad dextram, hoc eſt, cum 2 in 892, cujus factus particularis erit 9152; tum multiplica per 9 in 892, & factus erit 41184; locandus uno loco propius ſiniſtram verſus, multiplicabis demum per 8 in 892, & productum 36608 ſtatues uno loco adhuc propius ſiniſtram verſus, ita,

```
  4576 }
   892 } Factores.
―――――――
  9152 }
 41184 } Particulares facti in ſuis propriis locis.
36608  }
―――――――
4081792   Summa, ſive factus totalis.
```

Ratio locandi eſt, quia multiplicando per 9 in 892 revera mutiplicabas per 90, & mutiplicando per 8 in 892 revera multiplicabas per 800; ideóque ſcribendo cyphras in locis vacuis opus ita ſtaret,

4576 }
892 } Factores.

9152 }
411840 } Particulares facti.
3660800 }

4081792 Factus totalis.

Alterum exemplum,

580|34 } Uterque Factor cum tribus locis partium decimalium.
47|5 }

290170 }
406238 } Particulares facti.
232136 }

27566|150 Summa sive factus totalis, cum tribus locis abscissis pro decimali fractione.

Hujus operationis ratio petenda est à notis in sect. 3. cap. 2.

Alterum exemplum simile,

58|73 } Factores cum duobus locis partium decimalium.
600 }

0000 } Particulares facti in suis locis.
0000 } Si numerus sit multiplicandus per circulum nihil efficietur; veruntamen loci ratio habenda est.
35238 }

35238|00 Summa sive factus totalis cum duobus locis abscissis.

3. Quo-

3. Quoniam per cyphras nihil efficitur, ut jam diximus, satis erit si quæ ad dextram factorum sunt, tandem facto totali ex integris addantur, ita,

358 } Factores cum duabus cyphris ad dextram unius eorum.
600 }

214800 Factus totalis cum duobus circulis additis.

Multiplicatio est intellectu satis facilis, sed quando Factores sunt magni, ejus operatio tædium parit; quod tamen in quibusdam casibus (indicum ope) multò levius erit; ut ergo modum operandi per indices planum faciam, ita accipe,

```
          Factores { 234578920111324
                   { 678322122222222
                   ----------------------
              469157840222648
             469157840222648
            469157840222648
           469157840222648
          469157840222648
         469157840222648
14      469157840222648
partic- 234578920111324
ulares 469157840222648
facti 469157840222648
     703736760333972
    1876663136090592
   1642052440079268
  1407473520667944
  ----------------------------------
Fact, totalis  15912007091980956472228441928
```

Vides

Vides hic numerum ex 28 figuris conſtantem, moleſta ſatis Multiplicatione productum; quo ergo artificio (ſi fieri poſſit) habuero octo primas figuras, *ſc.* 15912007— quæ meo forſan propoſito abunde ſatisfacere poſſint, omiſſis 20 ultimis? Sane, id commode fieri poteſt ope Indicum; neque opus erit laborioſe percurrere ſingulas Factorum figuras. Regula eſt in Multiplicatione, Index cujuſque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum Multiplicatæ & Multiplicantis: ne hæſeris in verborum ambiguitate, ſcire debes, quod quilibet è quatuordecim factis, quos particulares appellavimus, conſtat etiam ex 14 factis particularibus, quorum uniuſcujuſque locus ab Indicibus erit manifeſtatus per regulam jam deſcriptam: quod viceſima prima figura facti totalis ſtare debet ſub Indice 20 eſt nimis manifeſtum.

Repete igitur eoſdem Factores cum Indicibus, ità,

Indices 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Factores $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$ 2 3 4 5 7 8 9 2 0 1 1 3 2 4
6 7 8 3 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2
• • • • • • •

2
46
469
7037
c 187663
b 1642052
a 14074735
*

Summa 15912004

Puncta hæc primis figuris apposui, quia vix utimur reliquis, niſi forte una ſuperioris Factoris pro incremento, quod animis ſuis ſervare vel aſportare jubentur tyrones.

Octo primæ figuræ facti totalis niſi

quod

quod in 4 sub asterisco deest generale incrementum, *viz.* 3. Index numeri 6 in *n* est 13, & index numeri 9 in *m* est 7; qui indices additi sunt 20: ideóque quia 6 in 9 facit 54, qui una cum incremento 1 (quod asportavi à figura 2 ante 9) est 55; scribe igitur 5 mox supra asteriscum, sub indice 20: & porta 5, multiplicando, ut soles reliquas figuras *m*, per 6, ut habeatur *a*; pro *b*, quoniam index 7 in *n* est 12, & index 8 in *m* est 8; qui indices additi sunt 20: dic ergo ex 7 in 8 fit 56: hic autem cave ne scribas 6 supra asteriscum; quia habita ratione incrementi quod suppeditatur à multiplicatione 7 in *n* per 9 in *m*, servares in memoria 6, quibus additis ad 56, datur summa 62: scribe ergo 2 supra asteriscum, & porta 6, multiplicando, ut soles reliquas figuras *m*, per 7; ut habeatur *b*.

Tum si multiplices 8 in *n* per 7 in *m*, una cum incremento portato, *viz.* 7, fiet 63; scribe 3 supra asteriscum; & porta 6; multiplicando reliquas figuras *m*, ut soles per 8; ut habeatur *c*.

Pro reliquis, duc 3 in 5, tum 2 in 4, tum 2 in 3, tum 1 in 2; ut indices (qui additi faciunt 20) requirunt: ita tandem ex horum factorum (ope indicum inventorum) summa: habes octo primas figuras, omissis 20; quod si figuræ punctatæ 6783221 contrario ordine positæ fuissent indices ex seipsis convenissent, ita ut superiorum quilibet, cum suo inferiore correspondente fecisset 20, nempe ità,

20.	13	12	11	10	9	8	7.	Indices.
	2	3	4	5	7	8	9	Figuræ punctatæ ordine contrario.
	1	2	2	3	8	7	6	
	7	8	9	10	11	12	13.	Indices corresp.

Et reliquæ septem figuræ, si adscriptæ fuissent ordine contrario, perrexissent ad indicem 20, ita,

20.19.18.17.16 15 14 13 12 11 10 9 8 7. Indices.
2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 3 8 7 6. Figuræ punctatæ ordine inverso.

Vides autem, attendendo ad indices, te habere 15912004, primas octo figuras producti totalis, omissis ultimis 20; sed profecto non accurate; quia à subsequentibus portari debuissent 3; ideóque debuisti habere 15912007: & forsan plus portari potuisset in aliis exemplis; sed quod ad computationem attinet per sinus naturales & tangentes, cujus gratia hæc operatio fuit instituta, res erit satis accurata; quanquam tacere non debeo quod nos jam hoc labore levati sumus, utpote qui computare solemus per sinus artificiales sive logarithmos, magno cum reipublicæ mathematicæ emolumento: nos autem hæc hactenus ut veram ideam hujus operationis, cujus contemplatio non est injucunda, habeas, &, ut authorem intelligas, etiam fusius exponimus.

Indices 210 $\overline{123}$

Factores { 246 | 914 ; 7253 } Figuræ ordine contrario.

Indices correspondentes $\overline{21}01$

In hoc exemplo index quilibet suo correspondenti additus dat o

α 7407
β 1235
γ 49
δ 17 } Facti particulares.

8708 Summa sive factus totalis purus à partibus.

Pro

Pro α dic ex 3 in 9 fit 27; pinges 7, & portabis 2, ut solet, &c.

Pro β dic ex 5 in 6 fit 30; adde 5 pro incremento ex 5 in 9, figuram subsequentem, & fit 35; pinges 5, & portabis 3, ut solet, &c. Dices ex 5 in 9 fit tantum 45; ergo portare debui tantum 4.

Respondeo, Quia 45 tam prope accedit ad 50 quam ad 40 portabis 5.

Pro γ dic ex 2 in 4, una cum 1 pro incremento, fit 9, &c.

Pro δ, ex 7 in 2, una cum 3 pro incremento, fit 17.

Secundus casus male pingitur in nostro codice, debuit enim figura 5 quæ in loco unitatis, poni non sub 4, sed uno loco ulterius versus dextram; sub indice $\bar{4}$, ita,

	210 $\overline{12345}$	Indices.
	246|914 ..	
	72|53	Figuræ ordine contrario.
	21 01	Indices correspondentes quorum quilibet suo superiori additus efficit $\bar{4}$.
Facti particulares α	74074200	
β	12345700	
γ	493828	
δ	172840	
	8708|6568	Factus totalis cum 4. locis partium.

Pro α dic ex 3 in nihil fit o, &c.

Pro β dic ex 5 in nihil fit o, &c.

Pro γ dic ex 2 in 4 fit 8, &c.

Pro δ dic ex 7 in 1, una cum 3 pro incremento, fit 10; scribe o, &c.

In

In tertio casu penultimus factus 63 debuit esse tantum 56; & ~~summa~~ 32260, nisi plus illi accreverit ex amputatis figuris, quod fieri posse supra ostendimus.

In quarto casu, & ultimo facto, pro 16 portatis, scribis 2, ità, quia 16 propius accedit ad 20 quam ad 10.

$$\begin{array}{r} \overline{25} \\ \underline{2} \end{array}$$

6. Multiplicatio speciosa connectit utramque magnitudinem propositam cum nota in vel x, vel plerunque absque nota, si magnitudines denotentur unica litera: & hoc longe melius, *sc.* ut scribas potius AE quam A in E vel A x E.

Si signa sint similia, ut +A multipl. per +E, vel —A per —E, producta magnitudo erit adfirmata; nempe +AE, sive AE, per 11 Sect. 1 Cap. Sed si signa sint diversa, ut +A per —E, producta magnitudo erit negata, nempe —AE, quippe + & — sunt signa diversa.

Effertur autem Multiplicatio per in, ut si dicam, A in E volo ut multiplicetur A per E, quod fit tantum jungendo literas, ita, AE.

Aq significat A quadratum, Ac A cubum, Aqq A quadrato-quadratum, Aqc A quadrato-cubum; & vocantur Potestates.

Multiplica A—E per B, factus erit BA—BE, nam ex B in A fit BA, quia signa sunt similia, & ex B in —E fit —BE, quia signa sunt diversa: at ex —B in —E fit +BE.

Unaquæque species multiplicandi debet multiplicari per unamquamque Multiplicatoris; ex A+E in A+E fit Aq + 2 AE + Eq: nam ducatur A + E in 5e, sive qua-

quadretur ita, duc A + E. A inferior ducatur tum in A tum in E superiores.
in A + E. dein E inferior ducatur tum in A tum in E superiores.

Aq+.1.AE } Particulares
.1.AE+Eq. } facti.

Aq+ 2 AE+Eq. Factus totalis.

Et nota quod nihil interest sive hæc sive illa species ordinem ducat; modo signa illæsa maneant, potes scribere, si placet, Eq + 2 AE + Aq, vel Eq + 2 EA + Aq; sic si multiplicares A x B per C x D, sive A B per C D; potes pro producto scribere vel A B C D vel D C B A vel C D A B; juxta hanc formam si multiplicares 3 A per 2 A, scribere deberes (jungendo) ita, 3A 2A vel 32 AA, id est, 3x2xAxA: sed quoniam gravis error hoc pacto facile oriri posset; nempe putares numerum 32 significare triginta duo, sed valet tantum sex, id est, 3 x 2; ideoque quoad figuras numerales adempta est hæc licentia, eas jungendi ad eum modum quo fit in speciebus; ergo multiplicare debes figuras ut solet; & ex 3 A in 2 A fiet 6 AA sive 6 Aq: sic ex 12 B in 4 B fit 48 BB sive 48 Bq ex 5 B in 3 C fit 15 B C ex 5 AE in 5 AE fit quadratum 25 AEAE sive 25 AAEE sive 25 Aq Eq quod usitatius.

Secundum *Cartesium* ex A in A fit AA sive Aq sive A^2 est enim 2 index quadrati, ut ante diximus.

ex A in Aq fit Ac sive A^3, nempe 3 est index cubi.

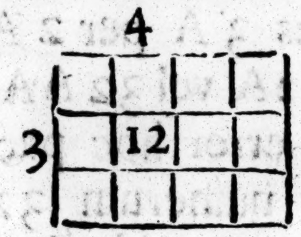
ex A in Ac fit Aqq sive A^4.

ex A in Aqq vel ex Aq in Ac fit ~~Aqc~~ sive A^5, &c. & sane longe præstat scribere A^5 breviter quam AAAAA.

Quandoque coactus eris exprimere unam magnitudinem per duas literas A—B, ut unam lineam per AB, & tum connectere debes magnitudines per notam in vel x, ut multiplica AB per CD, factus erit AB in CD vel AB x CD.

CAP. V. *De Diviſione.*

1. QUotus appellatur Parabola, nomine à Diophanto antiquo & egregio analyſta accepto; quia ex adplicatione oritur: ut adplica rectangulum 12 ad longitudinem 4, oritur latitudo 3.



2. In dividendo incipere debes ad ſiniſtram, ſed non debes ſubſcribere Diviſorem 297 ita $\frac{1871}{297}$, &c. —quoniam 2 non omnino continetur in 1 ideoque 187 non eſt Dividuus ſufficiens Diviſori; ſed ita ${}^{1}\frac{871}{297}$, &c.

In dividendo duobus modis proceditur: quidam dividunt per lituras, Diviſorem non ſubſcribendo, ſed ſubſcriptum cogitando; ita,

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad 12 \\
\qquad 8\cancel{9}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{1}7 \\
\text{Diviſor } 297)\ \cancel{1}8\cancel{7}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{5}\ (630084\tfrac{127}{297}\ \text{Quotus.} \\
\qquad \cancel{1}\cancel{7}8\cancel{2}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{6}8 \\
\qquad 8\cancel{9}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{1}8
\end{array}
$$

Per primam figuram in quoto 6 multiplica Divisorem 297, & factum 1782, dividendo subscribe & subtrahe è correspondente parte dividendi 1871, cujus reliquum 89 scribe supra; delens utrumque 1871, 1782. quod tamen reliquum in proxima operatione & ipsum delendum; sed nobis nunquam placuit hæc via delendi, quin præstat potius singulas operationes clare habere ante oculos, ut fit in eodem exemplo repetito, ubi Divisor semper exprimitur, qui modus etiam intellectu est longe facilior; ejus regulæ in his paucis carminibus breviter continentur.

Ad lævam incipies, reliquas punctato figuras:

ita 1871350̇7̇5̇ (points over the final figures)

297

1. *Quæres:* 2. *Responsúmque datum scribe in quotiente.*
3. *In divisorem ducas:* 4. *Tum subtrahe factum.*
5. *Alterá descendat nota:* 6. *Divisor moveatur.*
7. *Si frustra sit cyphra quoto:* 8. *Fiat numerator.*
Qui superest numerus, cui Divisor dato nomen.

Quot fuerint puncta tot erunt figuræ in quotiente.

Dividendus 1871$\dot{3}\dot{5}\dot{0}\dot{7}\dot{5}$ ($630084\frac{127}{297}$ Quotus.

Divisor 297

a 1782

b 893 Reliquum dividendi.
c 297 Diviſor motus.
d 891

e 2507 Reliquum dividendi.
297 Diviſor motus fruſtra bis.
f 2376

g 1315 Reliquum dividendi.
297 Diviſor motus.
h 1188

127 Reliquum divid. in quo Diviſor ne ſemel continetur.

Quæres quoties 2 in 18, reſpondetur 6, quam figuram ſcribe in quotiente: reſpondetur inquam 6, nam quanquam 2 ſit in 18 novies, non debes tamen ſcribere 9, quia reliquæ figuræ non conſentient: non eſt enim 9 media figura Diviſoris toties in 7, nempe in tertia figura dividendi, tum ducas reſponſum 6 in Diviſorem, & fit *a*.

Hoc factum, ſubtrahe ex dividendo, reſtat reliquum dividendi 89 in *b*: tum deſcendat prima figura puncta-ta, nempe 3 ad *b*; & punctum, ſi placet, memoriæ cauſa, deleas; tum Diviſor moveatur uno loco propius ad dextram, ut vides in *c*.

Jam novam Diviſionem inſtitue, operationes repetendo; & primum quæres quoties 2 in 8; reſpondetur

tur 3; reſponſum 3 ſcribe in quotiente, ut vides; tum ducas 3 in Diviſorem, & factum (*d*) tolle ex *b*, nempe reliquo dividendi reſtabit 2 prima figura in *e*, deſcendat altera nota 5, Diviſor moveatur, & quoniam motus ne ſemel continetur in 25; ſit cyphra quoto, & deſcendat o, & moveatur Diviſor, & quoniam iterum fruſtra, neque enim adhuc ſemel continetur 297 in 250, pone alteram cyphram in quoto, & deſcendat 7, & Diviſor moveatur.

Tum quæres quoties 2 in 25, reſpondetur 8, quod ſcribe in quoto, & duc 8 in Diviſorem, fiet *f*, quo ſublato ex *e*, reſtat 131 in *g*, cui deſcendens addatur ultima figura 5; & Diviſore moto, quæres quoties 2 in 13, reſpondetur 4, quo poſito in quotiente, & mox ducto in Diviſorem, fit *h*, quo ſublato ex *g*, reſtat 127, qui numerator erit fractionis, cujus Denominator erit Diviſor; ita, $\frac{127}{297}$.

Quod ſi fractionem decimalem habere velles, adde cyphras Numeratori quot libuerit, & perge per regulas antedictas dividendo per Diviſorem ſive Denominatorem, ut fit in hoc exemplo,

Diviſor cum 3. cyphris omiſſis } 6|000)4320 |$\underline{76}$5 Dividend. cum 3. figuris abſciſſis.

720|1$\underline{27}$5 Quotiens cum decimali fractione.

3. Propter tres cyphras omiſſas & totidem figuras abſciſſas dividis per unam ſolummodo figuram 6, & quotientem dividendo ſubſcribis: in fine autem diviſionis circuli ſupponuntur addi figuris abſciſſis, ità, 7650, & diviſio continuanda per 6, propter decimalem fractionem, nempe |1$\underline{27}$5, vel figuræ abſciſſæ reſtituendæ

 pro

pro Numeratore, & omissi circuli pro Denominatore; ita, $720\frac{765}{6000}$.

8. Dividas per numerum irrationalem; ita,

17
303
2803 *c*
149930 *a* reliq. divid.
Divisor irration. 357|092 6425) 467023 (1307|80
357093 Divisor irrat.
107127 *b*
2500 *d*
286 *e*

Quære quoties 3 prima figura Divisoris in 4, respondetur 1; scribe 1 in quoto & duc in Divisorem; sed quoniam 1 nihil mutat, mox tolle Divisorem ex dividendo restabit *a*; jam amputabis 3, ultimam figuram Divisoris; & quære iterum quoties 3 prima figura Divisoris est in 10 in *a*, respondetur 3; scribe 3 in quoto & duc 3 in Divisorem jam amputatum, dicendo ex 3 in 9 fit 27, &c. pro *b*, tolle *b* ex *a* restat *c*, viz. 2803.

Jam amputabis 9 à Divisore & quæres, sed quoniam Divisor subintelligitur frustra moveri, scribe cyphram in quoto atque amputabis cyphram in Divisore; tum iterum quæres quoties 3 in 28, *sc.* in *c*, respondetur 7, scribe 7 in quoto & duc 7 in Divisorem multatum jam tribus figuris, & dic ex 7 in 7 fit 49, sed quia 49 propius accedit ad 50 quam ad 40, scribe 0, & portabis 5, &c. pro *d*, tolle *d* ex *c* restat 303; jam amputabis 7 in Divisore & quære quoties 3 in 30, respondetur 8; scribe 8 in quoto & duc 8 in Divisorem amputatum, id est, in 35, & dic ex 8 in 5 una cum 6 pro incremento ex 8 in 7 fit 46, scribe 6, &c. pro *e*, tolle *e* ex 303 restat 17; tum amputabis 5 & quotum satis amplum habes.

Modus

Modus dividendi per indices ſatis innoteſcit ex iis quæ diximus in priore Capite.

Diviſio ſpecioſa.

Si AE Dividatur per A quotiens erit E, expuncta ſolummodo magnitudine A.

Sed ſi A dividatur per A expungetur quidem A, ſed quotiens erit 1, nam A eſt ſemel in ſeipſa, ſic 10 eſt ſemel in 10.

Si —AE dividatur per —A orietur E, quia ſigna ſunt ſimilia: ſi +AE per —A orietur —E, quia ſigna ſunt diverſa.

Si BCDFG dividatur per B orietur CDFG expungendo B utrobique: ſi per C dividatur orietur BDFG delendo C utrobique: ſi per BCD orietur FG delendo BCD utrobique.

Quod ſi Diviſor nullas habuerit eaſdem literas ſive ſpecies communes cum dividendo non poteſt diviſio aliter fieri quam per lineolam interjectam; ſic divide AB per CD oritur $\frac{AB}{CD}$

Quoniam multiplicando ex AA ſive Aq in BA fit BAAq ſive Bac, id eſt, BA cubus, quæ magnitudo fit etiam ex B in Ac, atque etiam ex A in BAq, ideoque vice verſa ſi BAc dividatur per Aq orietur BA; ſi per B orietur Ac; ſi dividatur per BAq orietur A; ſi BAc dividatur per BAc orietur 1; Nam quod multiplicatio conficit Diviſio diſſolvit.

Si dividas BA—CA per B—C: quoniam adplicando BA ad B oritur A, atque eadem A oritur adplicando —CA ad —C quotiens erit tantum A non A+A, ut forſan putares: ſic

adplica $\frac{AB+AC+AD+AE+AF}{}$

ad $B+C+D+E+F$

oritur tantum A: oritur inquam tantum A, ut vice versa per multiplicationem facile explorare potes.

Ideoque si videris unam aliquam speciem, ut A in hoc exemplo in omnibus speciebus, ut AB+AC, &c. potest fieri omnium ad illam speciem adplicatio, vel ad magnitudines in quas illa species ducitur, ut fit in exemplo.

Quod si una aliqua species ducatur in plures, ut in exemplo priori: & præterea aliqua alia species vel duæ aliæ, &c. ducantur in easdem, potest fieri omnium adplicatio vel ad has easdem vel ad illas quæ in has easdem ducuntur: adplica

$AB+AC+AD+AE+AF+BB+BC+BD+BE+BF$

ad $B+C+D+E+F$

oritur $A+B$.

In hoc exemplo vides A ductam in B+C+D+E+F, atque in easdem ducitur & B; ergo potest fieri adplicatio vel ad easdem B+C+D+E+F, & orietur A+B, ut fit in exemplo: vel potest fieri divisio per A+B, & orietur B+C+D+E+F.

Est quidem modus elegans inveniendi omnes Divisores per quos ulla magnitudo potest dividi—*Francisci à Schooten*, principio *Math. Universalis*, p. 31. lin. 34. dividantur datæ quantitates per—p. 33. lin. penult. a^3bc—ab^3c. quia 5 est quinquies in 25, ideo dividendo 25 AB per 5 A oritur 5 B.

Potes

Potes vulgaris Arithmeticæ veſtigia premere & juxta regulas jam ſupra expoſitas quamcunque magnitudinem dividere.

Ut divide Aq+2AE+Eq (A+E Quotiens.

per A+E.

Quæres quoties A in Aq, reſpondetur A, ſcribe in quoto & duc A in diviſorem A + E, fit Aq + AE; ſubtrahe factum ex dividendo juxta regulas Subtractionis antea expoſitas & erit reliquum dividendi Aq+2AE+Eq—Aq—AE, hoc eſt,

AE+Eq Reliquum dividendi.

A+E Diviſor.

Jam repete operationem, & quære quoties A in AE, reſpondetur E, ſcribe E in quotiente, & duc E in Diviſorem, fit AE+Eq, quo ſublato ex reliquo dividendi, nihil reſtat.

Divide cubum per ejus latus: nempe,

adplica Ac+3Aq E+3A Eq+Ec (Aq+2AE+Eq.

ad A+E.

Quære quoties A in Ac, reſpondetur Aq, ſcribe Aq in quoto, & duc Aq in Diviſorem, fit Ac+AqE; tolle factum ex dividendo reſtat

2AqE+3AEq+Ec Reliquum dividendi.

A+E Diviſor.

Quære quoties A in 2AqE, reſpondetur 2AE, ſcribatur 2AE in quoto, & ducatur etiam in Diviſorem, fit 2AqE+2AEq; tolle factum ex reſiduo dividendi reſtabit AEq

$$\frac{AEq+Ec}{A+E} \quad \begin{array}{l}\text{Reliquum dividendi.}\\ \text{Divisor.}\end{array}$$

Quære quoties A in AEq, respondetur Eq, scribe Eq in quoto, & duc Eq in Divisorem, fit AEq+Ec; quo facto sublato ex reliquo dividendi, nempe AEq+Ec, restat nihil, & Divisio perficitur.

Rogabis, Quare non potui in hac ultima operatione quærere quoties E altera pars Divisoris in AEq, quandoquidem E vult dividere AEq, nempe oritur AE, & nihil refert quo ordine species scribantur, sive A+E sive E+A, uti prius monitum.

Respondeo, Quia A altera pars Divisoris noluit dividere etiam & Ec; & hoc est nihil aliud quam quod in vulgaribus numeris observare edoctus es; ubi requiritur ut Dividuus sit sufficiens Divisori.

Potuisses quidem incipere si voluisses cum E, dividendo Ec per E pari successu.

Quod si hæc magnitudo composita dividenda fuisset, nempe Ac+3AqE+3AEq+Ec+Bc per A+E.

Primum extrahe quotientem Aq+2AE+Eq, ut ante, sed quoniam magnitudo non est ulterius divisibilis, fractio erit apponenda, cujus Numerator erit Bc, & Divisor A+E, Denominator

sic divide $bb + bc + AE$ per $b + c$

quia ex bb+bc ad b+c oritur b, non potest autem AE dividi per b+c; ideo quotus exprimatur cum fractione, ita, $b \frac{+AE}{b+c}$

CAP.

CAP. VI. *De Proportione.*

1. SI è quatuor numeris datis, primus ita se habeat ad secundum ut tertius ad quartum; dicuntur quatuor illi numeri proportionales geometrica proportione, quæ consistit in æqualitate rationum, vel in eadem numerorum ad se invicem habitudine, numeri geometricè proportionales significantur quatuor punctis (: :) ita 7. 9 : : 28. 36.

2. Multiplica tum 7 tum 9 per eundem 4. facti, *viz.* 28. 36. erunt multiplicatis, *viz.* 7. 9. proportionales per 18. 7. elem. 7. 9 : : 28. 36.

Habitudo inter duos numeros appellatur Ratio; inter plures Proportio vocatur; in hac Proportione ratio est utrobique eadem, *sc.* eadem est ratio 7 ad 9 quæ 28 ad 36; ratio autem invenitur dividendo antecedentem per consequentem, ut adplica antecedentem 7 ad consequentem 9, ita, $\frac{7}{9}$, hoc est, $1\frac{2}{7}$, & appellatur hæc ratio sub-super-bi-partiens septimas; ita etiam adplica 28 ad 36, sive $\frac{28}{36}$, hoc est, $1\frac{8}{28}$, sive $1\frac{4}{14}$; vel fractionem adhuc ulterius abbreviando $1\frac{2}{7}$, etiam ratio est subsuperbipartiens septimas.

At ratio 31 ad 7, $\frac{31}{7}$, hoc est, $4\frac{3}{7}$ est quadrupla supertripartiens septimas; quæ ut plenius & planius intelligantur sciendum quod ratio sive numerorum habitudo est vel æqualitatis, ut 4 ad 4, vel inæqualitatis; estque hæc inæqualitatis ratio vel majoris inæqualitatis, ut 8 ad 4, vel minoris, ut 4 ad 8.

Habitudo majoris inæqualitatis in 5 genera distribuitur, *scil.* multiplicem, superparticularem, superpartientem:

entem: multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem pariter habitudo minoris inæqualitatis, singulis vocabulis præposita præpositione sub; ut sub-multiplicem, sub-superparticularem, &c.

1. Multiplex est quando major minorem aliquoties continet, ut bis ter, &c. sine fractione, sic 12 est in ratione duodecupla ad 1, sextupla ad 2, quadrupla ad 3, tripla ad 4, dupla ad 6; & minor est pars aliquota majoris, nempe 6 est in 12 bis, sine fractione.

2. Superparticularis est quando major minorem semel duntaxat continet & insuper unam ejus partem aliquotam. *sc.* dimidiatam, tertiam, quartam, &c. si pars aliquota sit dimidiata $\frac{1}{2}$, ut 3 ad 2, $\frac{3}{2}$, hoc est, $1\frac{1}{2}$ dicitur sesquialtera; est autem 4 ad 3 $\frac{4}{3}$, hoc est, $1\frac{1}{3}$ sesquitertia; 5 ad 4, sive $1\frac{1}{4}$ sesquiquarta, &c. est etiam 1001 ad 1000 $\frac{1001}{1000}$, sive $1\frac{1}{1000}$ sesquimillesima: atque hic in fractione Numerator semper est unitas.

3. Superpartiens est quando major minorem semel duntaxat continet & insuper aliquot ejus partes aliquotas, ita tamen ut illæ non efficiant unam aliquotam; sic 8 continet 5 semel & insuper tres unitates, quarum quælibet est pars aliquota utpote quinta hujus numeri 5; ipse autem ternarius, ex illis compositus, non est pars una aliquota numeri 5, id est, non vult dividere 5 sine fractione: vel breviter, quando major minorem semel duntaxat continet cum fractione, cujus Numerator non erit unitas, ita 7 ad 5, sive $\frac{7}{5}$, hoc est, $1\frac{2}{5}$, est adhuc subdistinguendo super-bipartiens quintas, $\frac{8}{5}$ $1\frac{3}{5}$ est supertripartiens quintas, $\frac{9}{5}$ $1\frac{4}{5}$ est superquadrupartiens quintas, &c. $\frac{21}{11}$, hoc est, $1\frac{10}{11}$ est superdecupartiens undecimas; sic $\frac{25}{15}$ sive $1\frac{10}{15}$ est superdecupartiens decimas quintas, f. potius in minimis numeris ejusdem rationis, 4. Multi-

$1\frac{2}{5}$ est superbipartiens quintas.

4. Multiplex super-particularis est quando major minorem aliquoties continet, ut bis ter, &c. & præterea unam ejus partem aliquotam; sic 9 ad 4, $\frac{9}{4}$, hoc est, $2\frac{1}{4}$, unde quasi componitur ex multiplici & particulari.

5. Multiplex superpartiens est quando major minorem aliquoties continet & aliquot ejus partes aliquotas non efficientes unam aliquotam, vel unitas nequit esse in fractione; sic 11 ad 3, $\frac{11}{3}$, sive $3\frac{2}{3}$; ita 11 ad 3 est ratione tripla superbipartiente tertias, & in exemplo Authoris $\frac{31}{7}$, sive $4\frac{3}{7}$; 31 est ad 7 in ratione quadrupla supertripartiente septimas; unde hæc ratio quasi componitur ex multiplici & superpartiente.

3. Si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis, ut 7. 9 : : 28. 36. = est nota æqualitatis: 9x28=7x36; hoc theorema merito catholicum appelletur, cujus usus ubique est insignis: demonstratur autem 19. 7. elem. nam si sit 7. 9 : : 28. 36. quoniam 28 & 36 fiunt ex 7 & 9 multiplicatis per 4 erg. per expositionem, ut 7. 9 : : 7x4. 9x4. ergo factus ex mediis 9x7x4 necessario æquabitur facto ab extremis, nempe 7x9x4.

Pulchre in speciebus si sit B. C : : BA. CA, ex mediis C in BA fit CBA, ab extremis B in CA fit BCA; sed erit necessario CBA=BCA.

4. Hinc si 4 habuerint 8, quæritur quot habuerint 10?

5. Duc per auream regulam 8 in 10, & factum divide per 4, hoc est, $\frac{80}{4}$=20 quoto, qui est quartus proportionalis, *scil.* ut 4. 8 : : 10. 20.

Continua Proportio significatur per hanc notam $\div\!\!\div$; sic 1, 2. 4. 8. 16. &c. $\div\!\!\div$ sunt continuè proportionales, nempe

nempe ut 1 ad 2 ita 2 ad 4, & ut 2 ad 4 ita 4 ad 8, &c.

8. In speciebus $\alpha.\ \beta.\ \frac{\beta q}{\alpha}\ \frac{\beta c}{\alpha q}$ &c. sunt $\div\!\div$, id est, continue proportionales; nam ut $\alpha.\beta :: \beta.\ \frac{\beta\beta}{\alpha}$ sive $\frac{\beta q}{\alpha}$, sed quia adhuc non didicisti multiplicare fractiones, reliqua differenda ad Cap. 10.

In hac serie si ultimus terminus sit ω, & summa omnium terminorum progressionis designetur per Z, erit $Z - \omega$ summa omnium antecedentium, & $Z - \alpha$ summa omnium consequentium: & esto per 12. 5. elem.

10. $\alpha.\beta :: Z - \omega.\ Z - \alpha.$ ergo per theorema catholicum $\alpha z - \alpha q = \beta z - \beta\omega$. ab utraque parte æquationis tolle

αz erit $-\alpha q = \beta z - \beta\omega - \alpha z$. utrique parti adde $\beta\omega$

erit $\beta\omega - \alpha q = \beta z - \alpha z$. divide utramque per $\beta - \alpha$

erit $\frac{\beta\omega - \alpha q}{\beta - \alpha} = z$. atque ita vides quomodo ex tribus datis, nempe $\alpha.\ \beta.\ \omega.$ eruitur summa omnium terminorum in progressione geometrica. Hæc planius intelligas Cap. 11.

Hæc de geometrica proportione utilissima sunt ad investigationem analyticam anatocismi vel usuræ compositæ in calce libri: sciendum autem, quod, quoniam ratio annui fœnoris jam mutatur, loco $19|\underline{2}$ id est, $19^d.\ \frac{2}{10}$, pro una libra per annum reponend. $14\frac{1}{10}\frac{4}{}$ id est, fere 14^d. ob. & loco $1\frac{16}{10}$ ratio solidorum erit $1\frac{2}{10}$.

Et loco analogiæ 100. 108::1. $1|\underline{08}$

analogia erit 100. 106::1. $1|\underline{06}$

Et Logar. $1|\underline{06}$ est 0,02530.

Nota, quod in incremento unius libræ elocatæ pro certo

certo annorum numero, progressio est per singulos annos geometrica: ideoque *βω.* procreabitur ex 1^{li}. elocata pro certo annorum numero,

nempe ut 1. 2 :: 2. 4. &c.
sic 1. 1|06 :: 1|06 ad aliud, &c.

Th. 1. Juxta hanc methodum & 1. Theor. computavi, quod una libra elocata ann. 21. dabit in annorum fine $3^{li}. \frac{139}{100}$. pro an. 30. 5^{li}.|43

Th. 3. Et (una libra per annum) intermissa 21. annos, dabit $39^{li}. \frac{182}{100}$. pro an. 30. 79^{li} |05

Th. 5. Et emptor unius libræ per ann. pro 21. an. deponet in pecuniis numeratis 11^{li}.|76
pro an. 30. 13^{li}.|76

9. Sectio nona Authoris demonstratur ab *Euc.* 5. & 7. Elemen.

10. Si binarum rationum, *scil.* $\frac{7}{1}\ \frac{9}{1}$ consequentes sint æquales, nempe 1=1, sunt ut antecedentes, *viz.* 7 ad 9: si vero antecedentes sint æquales (ut in $\frac{1}{9}\ \frac{1}{7}$ antecedentes, *scil.* 1 & 1 sunt æquales) sunt reciproce ut consequentes, hoc est, non ut 9 ad 7, sed ut 7 ad 9.

nempe ut $\frac{1}{9}\ \frac{1}{7}$ :: 7. 9.

15. Quoniam habitudo numerorum ad se invicem invenitur dividendo antecedentem per consequentem, ut adplicando 8 ad 4, oritur $\frac{8}{4}$, hoc est, 2; quotus hic appellari solet denominator rationis, vel rationis quantitas; etiam & ratio ipsa vocari possit; sic B ad C ratio sive denominator est $\frac{B}{C}$ ita BA ad A ratio est $\frac{BA}{A}$ sive B: etiam BA ad CA ratio est $\frac{BA}{CA}$ sive $\frac{B}{C}$ uti satis patet ex legibus Divisionis supra expositis.

Ideoque

Ideoque vice-verſa ſi duxeris quotum ſive rationem in conſequentem, id eſt, diviſorem, reſtituetur antecedens, quoniam quod diviſio diſſolvit multiplicatio conficit; ita ex 2 in 4 fit 8, ex $\frac{B}{C}$ in C fit B, ex $\frac{BA}{A}$ (ſive B) in A fit BA, ex $\frac{BA}{CA}$ (ſive $\frac{B}{C}$) in CA fit BA, ut planius infra intelliges.

Oſtendit *Oughtredus* in Sect. 15. rationem antecedentis ad conſequentem componi vel ex ratione antecedentis ad tertium & tertii ad conſequentem, vel ex ratione tertii ad conſequentem & antecedentis ad tertium $7 . 9 :: \times \frac{7.A}{A.9}$ item $7 . 9 :: \times \frac{A.9}{7.A}$.

Ratio ex rationibus componi dicitur quando rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem per quintam defin. ſexti Elem. id eſt, cum rationes inter ſe multiplicatæ vel earum denominatores inter ſe multiplicati effecerint rationem; ſic 4 eſt ad 2 in ratione dupla, denominator eſt 2; & 9 eſt ad 3 ratione tripla, cujus denominator eſt 3; ratio autem ex his rationibus compoſita, ex dupla in triplam fit ſextupla; *ſcil.* ex 2 in 3 denominatoribus in ſe invicem ductis fit 6, denominator rationis ſextuplæ; vel quoniam denominatores 2 & 3 ita exprimi poſſint, $\frac{4}{2}\ \frac{9}{3}$ ex $\frac{4}{2}$ in $\frac{9}{3}$ fit $\frac{36}{6}$, denominator rationis ſextuplæ.

Hinc ſi ratio in eandem rationem (id eſt, in ſe) ducatur, facta erit illa ratio duplicata; ſic rationis 8 ad 4, denominator eſt 2; ex 2 in 2 fit 4, denominator rationis quadruplæ; triplicitur hæc ratio multiplicando factum 4 iterum per 2 fiet 8, denominator rationis octuplæ; & ex 2 in 8 fit 16, quadruplicando, &c. ideoque

que in continue proportionalibus ubi ratio eſt eadem ut

$$\left.\begin{array}{l} 64.\ 32\ \ 16\ \ 8\ \ 4\ \ 2\ \ 1 \\ 729.243\ \ 81\ \ 27\ \ 9\ \ 3\ \ 1 \end{array}\right\} \div$$

Prima 64 eſt ad ſecundam 32 in ratione dupla quæ eſt ſimpla; ad tertiam 16 in eadem ratione dupla duplicata; ad 8 in ratione dupla triplicata: ſiquidem 8 octies continetur in 64: ita 729 eſt ad 81 in ratione tripla duplicata, ad 27 in eadem ratione triplicata; unde apparet magnam eſſe differentiam inter rationem duplam & duplicatam, item triplam & triplicatam, ex. gr. 9 non eſt ad 1 in ratione dupla ſed noncupla, eſt tamen 9 ad 1 in ratione 3 ad 1 duplicata, quia denominator rationis triplæ 3 in ſeipſum facit 9, neque ſemper duplicatur ratio, ſi multiplicetur per 2, ex. gr. 3 eſt ad 1 in tripla ratione; hujus dupla eſt ſextupla, ſed duplicata eſt quando ducitur tripla in ſeipſam, unde fit noncupla; ſic etiam ſi ratio 3 ad 1, nempe tripla, tripletur, ut ita dicam, fit ratio tantum duplicata, *ſc.* 9 ad 1 in ratione 3 ad 1, ſed 27 ad 1 eſt in tripla ratione triplicata, id eſt, ex 3 in 3 fit 9, & ex 3 in 9 fit 27.

Demonſtratio hujus rei pendet ex hoc generali Theoremate, quod ratio duorum quorumlibet numerorum componitur ex ratione antecedentis ad tertium, &c.

Ut ſumantur ad libitum 20 & 5, ſumatur etiam ad libitum quilibet numerus ſive major alterutro 20 vel 5 ſive minor nihil intereſt, ſed planioris demonſtrationis cauſa accipe 10.

Dico rationem 20 ad 5, quæ eſt quadrupla, componi ex ratione 20 ad 10, & ex ratione 10 ad 5; nam denominator rationis prioris eſt $\frac{20}{10}$ ſive 2; etiam & poſterioris $\frac{10}{5}$ ſive 2; ſed ex 2 in 2 fit 4 denominator ra-

 tionis

tionis quadruplæ; sic ex $\frac{20}{10}$ in $\frac{10}{5}$ fit $\frac{200}{50}$, hoc est, 4.

Quod universaliter ita se habere, quidam demonstrarunt assumpto hoc principio, cujus veritatem hic supra ostendimus, *viz.* denominatorem rationis multiplicatum in consequentem producere antecedentem.

A ad C cujus denominator esto F; hæc ratio componitur ex ratione A ad B, cujus denomin. D; & ex B ad C, cujus denom. E; dico F componi ex D in E: nam ab assumpto principio FC=A=DB= erg. FC=DB. erg. per 19.7. F.D :: B.C; sed quoniam E est denomin. rationis B ad C, est etiam E denominator rationis F.D. ergo ab assumpto principio DE=F. quod erat dem. *Oughtredus* sic demonstrat, 7.9 :: 7 x A. 9 x A per 17.7. & Sect. 2. hujus: sed ratio 7 A ad 9 A manifeste componitur, operante arithmetico, ex 7 ad A, cujus denominator $\frac{7}{A}$; & A ad 9, cujus denominator $\frac{A}{9}$ nempe ex $\frac{7}{A}$ in $\frac{A}{9}$ fit $\frac{7A}{9A}$ ut planius intelliges ad Cap. 10. & 7 A rectangulum est ad rectangulum 9 A, in ratione quæ ex lateribus componitur per 23. 6.

Item quoniam ut 7.9 :: 7A. 9A. 7A ad 9A ratio componitur ex $\frac{A}{9}$ & $\frac{7}{A}$

Hinc in pluribus magnitudinibus, quot libuerit, ut A B C D E, erit ratio primæ A ad ultimam E composita ex A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, quia, ut ante, A ad E componitur ex A ad D & D ad E; verum A ad D componitur ex A ad C & C ad D; quinetiam A ad C componitur ex A ad B & B ad C; ideoque ratio

A ad

A ad E componitur ex omnibus intermediis rationibus & in continue proportionalibus, ut 1.2.4.8.16.32.&c. ubi ratio est eadem, tertia ad primam composita erit ex ratione prima in se ducta, id est, duplicata, quarta ad ad primam in eadem triplicata.

Ab eodem assumpto principio facile est speciose demonstrare Theorema catholicum, *sc.* factum ex mediis = facto ab extremis A. B :: C. D. sit enim E rationis denominator ergo

$$EB = A \ \& \ ED = C. \text{ erg. ut } \underbrace{EB.\ B :: ED.\ D.}$$

sed BED = EBD. quod erat dem.

Aq est in duplicata ratione radicis A ad 1, nam

$$\text{ex } \frac{A}{1} \text{ in } \frac{A}{1} \text{ fit } \frac{Aq}{1} \text{ id est } Aq.$$

Et quadrata sunt in duplicata ratione laterum, *sc.* Aq ad Bq, in ratione A ad B duplicata, nam ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{A}{B}$ fit $\frac{Aq}{Bq}$ ut planius ad Cap. 10. intelliges; nimirum horum quibusdam per anticipationem fere dictis.

16. Inventio quarti Proportionalis, &c.

Hic Clarissimus Author utitur sinubus naturalibus, multiplicando & dividendo juxta auream regulam, jam verò ad unum fere omnes utuntur sinubus artificialibus, id est, logarithmis; nempe in analogia, logarithmi terminorum secundi & tertii adduntur, & si summæ subtrahatur logar. prim. restabit logarithmus quarti proportionalis; utile erit ad azymuthum, id est, distantiam solis à meridiano inveniendum exempla proponere, nempe maxima declinatio solis est 23°. 30'. plurimi

nuper ſtatuerunt 23°.31′. Sed Aſtronomia Carolina mavult retinere 23°. 30′.

Eſto Sol in ſecundo gradu Tauri, id eſt, diſtans à puncto æquinoctiali proximo 32°. & eſto ſolis altitudo 40°. cujus complementum eſt 50 grad. ſit denique poli elevatio 52°. 15′. cujus compl. eſt 37°. 45′. Vide *Wingati* Aſtron. Probl. 15. in Appendice.

Probl. data ſolis maxima declinatione, una cum diſtantia ſolis à proximo æquin. puncto, invenire præſentem ejus declinationem: analogia erit rad. ſin, diſt :: ſin, max, declin. ſin, declin. præſ.

ut rad. 90.	10,000000
ad ſin. diſt. 32.	9724210 } addantur.
ita ſin. max. decl. 23°. 30′.	9600700 }
ſin. præſ. decl. 12°. 12′.	~~1~~9324910

ex hac ſumma radius primo loco poſitus auferendus, ſed non opus eſt ut ſubſcribatur, ſatis eſt vel negligere vel obliterare primam unitatem, ut ſinus quærendus in tabulis ſit 9324910. *viz.* logar. 12°. 12′. id eſt, declin. ſolis ab æquatore, quando ſol eſt in ſecundo gradu tauri: deinde eorum gratia quæ ſequuntur ex 90 grad. tolle 12°. 12′.

viz. ex	89°	60′.
tolle	12	12
reſt.	77	48. Diſtantia ſolis à polo mundi.

Tum vide *Wingat.* ibidem, Probl. 27. ad azymuthum inveniendum per duas operationes.

Ex datis cos. elev. poli,	37° 45′		addantur.
dist. solis à polo mundi,	77 48		
cos. alt. solis,	50 co		
summa trium,	165 33		
Ex semisumma,	82 46. 30″.	vel ex 81°. 106′.	
tolle dist. à polo mundi,	77 48.	tolle	77 48
rest. differentia,	4 58.	rest.	4 58

Prim. analogia erit ut rad.	10,000000	
ad compl. s. elev. 37°. 45′.	9 786905	add.
ita compl. s. alt. 50	9 884254	
ad quartum sinum	9 671159.	sum.

Secund. anal. erit ut 4tus si.	9 671159	
ad sin. semisummæ 82.46.	9 996530	add.
ita sin. differentiæ 4.58.	8 937398	
ex hac summa	18 933928.	sum. ex qua primus term. toll.
tolle quartum sinum	9 671159.	1mo loco anal. posit.
ad sinum septimum	9 262769.	rest.
cui addatur radius	19 262769.	

hujus summæ pars dimid. 9 631384. erit sinus arcus cujus compl. duplus arcus est azymuthus quæsitus ab aquilone.

Quære igitur sin. 9631384 in tab. logar. ut vocabulum in Dictionario reperies eum respondere grad. 25. 20. cujus dupl. *viz.* 50. 40′. est azym. ab austro; & comp. 64. 40′. cujus dupl. 129. 20. est azym. ab aquilone.

Ut ſecunda operatio facilius perficiatur, jam uti ſolent complemento Arithmetico, quando rad. non eſt in primo loco analogiæ; eſt autem compl. Arithm. in quovis logarithmo, reſiduum ultimæ figuræ ad 10, & reliquarum omnium ad 9, quod currente oculo elicitur.

Sic quarti ſinus, nempe, 9671159.

Compl. Arithm. eſt 0328841. hoc complementum ſecundo & tertio terminis addendum, ut ſumma omnium (dempta unitate prima vel radio, ut in prima operatione, quando radius erat in primo loco) ſit logarithmus exhibens ſinum ſeptimum ſine formali ſubſcriptione & ſubtractione; opus hoc modo renovatum ſic ſtaret.

Secunda analogia erit;

ut iſte 4tus ſin. cujus compl. arith.	0328841	
ad ſin. ſemiſummæ 82. 46.	9996530	add.
ita ſin. differ. 4. 58.	8937398	
ad ſin. ſept. ut ante ſum. trium	9262769.	

Ratio hujus operationis eſt quia abjiciendo radium in ſumma trium non ſolum ſubtraxi compl. quod addidi, ſed & ipſum ſinum quartum facili litura; puta, prout ex 9 ſublato 4, idem numerus reſtabit, nempe 5; ſi ad 9 addam 6, (*viz.* 6 eſt compl. arith. τȣ 4 ad 10) modo ex ſumma 15 tandem adimam 10, quod ad aſtronomica quæ ſequuntur, ea melius petuntur à nuperis Authoribus.

18. Partes ſexageſimæ, puta 45, convertuntur in decimales dividendo per 60, *ſcil.* per auream regulam; ſi 60 habuerint 45, quot habuerint 100? nempe 0|75 ſive $\frac{75}{100}$; & quoniam denominator in hac fractione decimali tribus figuris exprimitur, ideo diviſio per 60 removet

movet lineam separatricem uno loco versus sinistram. { In ex. scrup. sequ. incipit dividere 45^{iiii} (cyphris ut opus additis) oritur 75 supra script. &c.

Æquinoctialis dividitur in 360 gradus, id est, 24x15, & sumuntur 15 gradus pro una hora. { In exem. dividit primum numerum per 6, & quotum infra scriptum per 60, quod æquipollet divisioni per 6 in 60, i. e. per 360.

25. Esto A. E : : M—A. E—N : quoniam factus ab extremis æquatur facto ex mediis, EM—AE=AE—AN. & transpositis speciebus ab una parte æquationis in alteram, sub signis contrariis, ut infra doceberis, Cap. 16. exurget 2AE—ME=AN. ideoque utraque parte divisa per 2A—M fiet $E=\frac{AN}{2A-M}$.

CAP. VII. *De maxima communi mensura*, &c.

Docuit *Euclides*, lib. 7. Definit. 11. numerum illum esse primum quem unitas sola metitur, hoc est, dividit, ita, 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31, &c. sunt omnes primi: atque idem *Euclides*, ibidem, Definit. 12. definit illos numeros primos inter se esse, quos sola unitas communis mensura metitur, ut 15. 8. sunt inter se primi; nam quanquam 15 dividi potest tum per 3 tum per 5, & 8 dividi potest tum per 2 tum per 4, tamen nullus horum (3 5 2 4) utrumque tum 15 tum 8 dividet, sed sola unitas est utriusque communis mensura.

Jam quoniam sæpe fit quod duo vel plures numeri non primi inter se quandoque dividi possint à pluribus mensuris sive divisoribus ut 512 256 dividi possint per

256 128 64 32 16 8 4 2, docuit *Euclides*, in Propositione 2. septimi El. quomodo in non primis inter se numeris, maxima communis mensura sive maximus eorum divisor inveniatur, nempe perpetua divisione majoris per minorem & divisoris per reliquum: & divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absque ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati communis mensura; quæ ab *Euclide* huc transtulit *Oughtredus*, fractionum causa; nam eadem fractionis quantitas sive ratio exprimi potest per diversos numeros, ut in his omnibus fractionibus $\frac{512}{256}$ $\frac{256}{128}$ $\frac{128}{64}$ $\frac{64}{32}$ $\frac{32}{16}$ $\frac{16}{8}$ $\frac{8}{4}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{2}{1}$ eadem est ratio, *scilicet*, dupla, jam frequenter valde conducit ut eandem fractionem habeas in minimis numeris in quibus potest exprimi, ut pro $\frac{512}{256}$ scribas $\frac{2}{1}$.

Vidisti autem in secunda Sectione sexti hujus, quod si idem numerus duos datos numeros 512 & 256 dividat, quoti erunt divisis proportionales, id est, in eadem ratione cum divisis; quinetiam si dividas eosdem duos vel quoslibet alios per maximam communem mensuram, habebis duos quotos in eadem ratione cum divisis & in minimis numeris in quibus ratio ista potest exprimi, ut demonstratur in 35. 7. elem. ut si dividas 512 & 256 per 256, qui est maximus numerus, qui potest utrumque tum 512 tum 256 dividere, quoti erunt 2 & 1, qui sunt minimi in eadem ratione cum 512 & 256.

```
                  a
       31   124  155
31) 124) 155) 744) 899 (1414
    124  124  620  744
```

In

In exemplo divide 899 per 744, pone 1 in quotiente; & quoniam 1 nihil mutat, tolle 744 ex 899, relinquitur 155, per quem divide divisorem 744, oritur 4; scribe 4 in quoto; & per 4 multiplica 155, fit 620, quem tolle ex 744, relinquitur 124, per quem divide ultimum divisorem 155, oritur 1; scribe 1 in quoto, & tolle 124 ex 155, restat 31, per quem divide 124, oritur 4; scribe 4 in quoto, & per 4 multiplica 31, fit 124, qui si tollatur ex 124, restat 0; ideoque ultimus divisor 31 dividens penultimum 124, sine reliquo erit maximus divisor sive communis mensura, qui potest dividere 899 & 744, & revera solus, nam 2 vult dividere 744, sed non vult dividere 899.

In nostro exemplo divide 512 per 256, oritur 2, ex quo ducto in 256, fit 512, quo sublato ex 512, manet 0; ergo 256 est maxima communis mensura: sunt autem plures minores, ut supra videre licet.

In speciebus potes dividere 3Aq & 6A per 3A, maximam utriusque communem mensuram, quotientes erunt A & 2.

Adplica 4Acc & 6Aqq ad 2Aqq, quotientes erunt 2Aq & 3; hic 2Aqq est maxima communis mensura, sunt autem minores mensuræ, 2. 2A. 2Aq. 2Ac. A. Aq. Ac. Aqq. quæ omnes possunt dividere 4Acc & 6Aqq.

Hinc fractiones speciosæ facile abbreviantur, dividendo per maximam ipsarum communem mensuram, nempe $\frac{BqA}{Bqc}$ reducitur ad $\frac{A}{c}$ dividendo per Bq maximam communem mens.

3. In

3. In operatione Proportionis, ut 12. 8 : : 15. 10. ducendus est secundus terminus in tertium, & factus dividendus per primum ad quartum (*viz.* 10 in exemplo) inveniendum, quod ubi numeri multiplicandi & dividendi sunt magni tædium parit; jam vero quoniam sæpe fit ut rationes facile reducantur ad minimos terminos, hinc Proportionis operatio sæpe facilitatur, ita ratio 12. 8. reducitur ad 3. 2. erg. 3. 2 : : 15. 10. & permutando 3. 15 : : 2. 10. hic 3. 15 reducitur ad 1. 5. erg. 1. 5 : : 2. 10. sive 1. 2 : : 5. 10. ut in exemp.

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ \cancel{3} & 2 & & 5. & \\ \cancel{12} & \cancel{8} & :: & 15. & 10. \end{array}$$

CAP. VIII. *De Partibus.*

3. Quam rationem habet numerator ad denominatorem eandem habet quantitas significata ad unitatem, 4. 5 : : $\frac{4}{5}$. 1.

R. S : : $\frac{R}{S}$ 1. nam per auream regulam & Cap. 10. hujus R. S : : $\frac{R}{S}.\ \frac{SR}{SR}.$ sed $\frac{SR}{SR}$ valet unitatem, quia denominator est æqualis numeratori; sic in numeris $\frac{20}{20}$ $=1.$

CAP.

CAP. IX. *De Additione & Subductione partium.*

I. FRactiones sunt ejusdem speciei quando eosdem habent denominatores, ut 12 & 12 in his fractionibus $\frac{4}{12}$ $\frac{10}{12}$; & tum sive Additionis sive Subtractionis, operatio est plana & facilis in numeratoribus partium peragenda ad eum modum quo fit in integris, ut in exemplo hic posito addendo, summa erit 4 + 10, id est, $\frac{14}{12}$, vel subtrahendo 10—4, id est, $\frac{6}{12}$.

Sed si sint diversarum specierum, id est, si diversos habeant denominatores, ut 12 & 3 in his fractionibus $\frac{10}{12}$ $\frac{4}{3}$, reduci debent prius ad eundem denominatorem; id autem hac arte optime fieri potest dividendo denominatores 12 & 3 per maximam ipsorum communem mensuram, quæ hic erit 3; divide ergo 12 per 3, oritur 4; & 3 per 3, oritur 1; ita habes duos quotos, nempe 4 & 1, numeros primos & minimos in eadem ratione cum 12 & 3; si igitur hos quotos 4 & 1 alternè ducas in 12 & 3, sive per crucem, ita, $\begin{array}{ccc} 12 & & 3 \\ & \times & \\ 4 & & 1 \end{array}$ habebis ex alterna multiplicatione numerum eundem factum ex 12 in 1 atque ex 3 in 4, nimirum 12, qui numerus 12, hac arte inventus, minimus est numerus, qui dividi potest tum per 4 tum per 3, ut demonstratur apud *Euclid.* 36. 7. El.

Jam prout hactenus hos quotos multiplicasti alterne in denominatores 12 & 3, pro novo & communi denominatore 12 ita debes & alterne multiplicare eosdem quotos 4 & 1 in numeratores 10 & 4; alterne (inquam) sive per crucem,

ità

ita, $\frac{10}{4} \times \frac{4}{1}$ unde ex 1 in 10 fit 10, ex 4 in 4 fit 16. fiunt, inquam, 10 & 16 pro novis numeratoribus, in quibus additio vel ſubductio facienda eſt, & ſummæ denique vel differentiæ communis ille denominator 12 ſubſcribendus, totum opus ita ſtaret,

$$
\begin{array}{rcccl}
 & & \overbrace{}^{26} & & \text{ſum. novorum numerat.} \\
 & 10 & + & 16 & \text{novi numeratores} \\
 & 10 & & 4 & \text{numeratores} \\
 & \overline{} & & \overline{} & \\
\text{Max. com. menſ. 3)} & 12 & \times & 3 & \text{denominatores.} \\
 & 4 & & 1 & \text{quoti} \\
 & & 12 & & \text{novus denominator ex alterna multiplicatione.}
\end{array}
$$

Ratio quare idem numerus 12 exurgit ex alterna iſta multiplicatione petenda eſt ex 2. 6. hujus, & 18. 7. Ele. quoniam 4 & 1 ſunt in eadem ratione cum 12 & 3. *ſc.* 4. 1 : : 12. 3. ergo per Theorema catholicum 1 x 12 = 3 x 4; hoc artificio inventi ſunt novi numeratores ad novum denominatorem in iiſdem rationibus cum iis qui primo poſiti erant, & ratio eſt, quia per eandem 18. 7. alternè multiplicas duos 4 & 3 primo poſitos per quotum eundem 4, unde fiunt facti, *ſc.* 16. 12. multiplicatis proportionales 4. 3 : : 16. 12.

Potuiſti mox pro novo denominatore multiplicaſſe denominatores 12 & 3 in ſe invicem, unde factus fuiſſet 36 pro novo denominatore, ſed potius dividis per max. comm. menſ. ut rationes habeas in minimis numeris.

ſum.

ſum.nov.numer.		67					152
novi numerat.	39	+	28	57		8	5——
numeratores	13		7	19		1	144
integer in medio	—	2	—eſt3—aufer.è		6—		57
max.cō.menſ.4)	16		12	6)48		18	3——
							144
quoti	4		3	quoti 8		3	95
							2——
novus denominator	48						144℞
				novus denom.144			

Integer 2 qui in medio ponitur non conſideratur in prima operatione, ſed ex 3 quoto in 13 & quoto 4 in 7 fiunt 39 & 28 pro novis numeratoribus, qui adduntur per ſignum + & ſumma eſt 67, adeo ut fractiones jam tandem additæ ſint $\frac{67}{48}$, quæ fractio vocatur impropria, & eſt unitate major, quia numerator eſt denominatore major, & dividendo numeratorem per denominatorem reſolvitur in $1\frac{19}{48}$ quibus additis ad integrum 2 in medio, erit ſumma $3\frac{19}{48}$.

Eodem modo in ſecundo exemplo, quod eſt ſubtractionis, emergunt tandem $3\frac{57}{144}$ auferend. è $6\frac{8}{144}$ oſtendit operandi modum in reliquis numeris juxta poſitis, qui ab imperitis accipi poſſint pro alio exemplo, quoniam non potes tollere $\frac{57}{144}$ ex $\frac{8}{144}$, reſolvit igitur $6\frac{8}{144}$ in $5\frac{152}{144}$, nam $\frac{144}{144}$ valet unitatem, adde $\frac{8}{144}$, ſumma eſt $\frac{152}{144}$; jam ergo tolle 3 ex 5 reſtat 2, & tolle 57 ex 152, reſt. 95, ideoque $2\frac{95}{144}$ erit ℞ ſive reſiduum.

In ſpeciebus eſto exemplum additionis, adde $\frac{A}{B}$ & Z ſum. $\frac{A+ZB}{B}$ reſolve integrum Z in fractionem ſub-

ſcribendo

ſcribendo unitatem, ità, $\frac{A}{B} \times \frac{Z}{1}$ tum quia denominatores B & 1 non habent communem menſuram, multiplica B in 1 pro denominatore, & decuſſatim, tam 1 in A quam B in Z pro numeratoribus, quos conjunge per ſignum + pro ſumma.

Eſto exemplum ſubtractionis; ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$ reſtat $\frac{CA-Bq}{BC}$ duc B in C pro novo denominatore, & decuſſatim, tam C in A quam B in B pro novis numeratoribus, quos conjunge per ſignum — pro differentia.

Eſto exemplum additionis ubi opus eſt communi menſura.

$$\begin{array}{lcccl} & BE & + & DA & \text{novi numeratores} \\ & B & + & D & \text{numeratores} \\ & \overline{} & & \overline{} & \\ \text{max. com. menſ. C.)} & CA & \times & CE & \text{denominatores} \\ & A & & E & \text{quoti} \\ & & \underbrace{}_{CAE} & & \text{novus denominator ex altern. multip.} \end{array}$$

Breviter ita ſpecioſe demonſtratur BE novum numeratorem eſſe ad CAE novum denominatorem, ut B ad CA per 2 ſexti hujus, ut B. CA :: BxE. CAxE. *ſc.* duobus, B & CA multiplicatis per eundem E.

Si denominator ſit idem utrobique, ut $\frac{A\ Z}{B\ B}$ non opus eſt ut ſcribas $\frac{AB+ZB}{BB}$ ſed ſufficit ut in nume-

ratoribus

ratoribus partium fiat additio, ita, $\frac{A+Z}{B}$
in compoſitis ſpeciebus ad AB + DE adde A + E.

$$\overline{}$$
$$A+E$$

ſtatuantur ita, $\dfrac{AB+DE}{A+E} \times \dfrac{A+E}{1}$

ſumma erit $\dfrac{AB+DE.\ \text{plus}\ Aq+2AE+Eq.}{A+E}$

Si ſpecies adjunctas ſibi habuerint fractiones numerales, ut ad $\frac{1}{2}$B adde $\frac{1}{4}$ C, quoniam $\frac{1}{2}B=\frac{B}{2}$ ſcribe ita,

ad $\dfrac{B}{2}$ adde $\dfrac{C}{4}$

max. c. m. 2.) 2 $\times$ 4 ſumma erit $\dfrac{2B+C}{4}$
quoti 1 2
nov. denom. 4

Quod additio conficit ſubtractio diſſolvit, ergo ex $\dfrac{2B+C}{4}$ tolle $\dfrac{C}{4}$

$\dfrac{2B+C}{} - \dfrac{C}{}$
max.cō.m. 4) 4 $\times$ 4
quoti 1 1
novus denom. 4

In hoc exemplo quum unitas nihil mutat, & $-\frac{C}{4}$ expungit $+\frac{C}{4}$, relinquitur $\frac{2B}{4}$, id eſt, $\frac{B}{2}$ dividendo tam numeratorem quam denominatorem per 2, atque idem evenit ac ſi in numeratoribus partium operatio mox peracta fuiſſet.

Ex

Ex $\frac{3}{4}$B tolle $\frac{2}{10}$A, quoniam $\frac{3}{4}$B$=\frac{3B}{4}$, nam ex $\frac{3}{4}$ in $\frac{B}{1}$ fit $\frac{3B}{4}$, ut proximo Capite patebit. Scribe $\frac{3B}{4}$ & $\frac{2A}{10}$.

	15B —	4A	novi numeratores
	3B	2A	numerat.
max. cō. mens. 2)	4	10	denomin.
quoti	2	5	
novus denom.	20		

differentia est $\frac{15B-4A}{20}$

CAP. VIII.

De Multiplicatione & Divisione partium.

IN fractionibus $\frac{3}{4}\times\frac{6}{8}$ 3 & 8 sunt heterologi termini, *scil.* unus numerator, alter denominator; 3 & 6 homologi, *scil.* uterque est numerator.

Scire te oportet quod operationes multiplicationis & divisionis præstari possint sine reductione, sed sæpe conducit terminos reducere, ut fractiones sive rationes exhibeantur in minimis numeris; sic in $\frac{512}{256}$ termini divisi per max. comm. mens. *scil.* 256, comparantur, id est, reducuntur ad minimos terminos, *sc.* ad $\frac{2}{1}$

Memoriæ causa, & cum grano Poeticæ licentiæ, regula esto,

Comparat in fractis multiplicatio cruces.

Duc $\frac{9}{16}$ in $\frac{20}{27}$; statuantur ita,

quoti

quoti 1 x 5

$$\frac{\cancel{9}}{\cancel{16}} \times \frac{\cancel{20}}{\cancel{27}} \text{ fit } \frac{5}{12}$$

quoti 4 x 3

quoti ex 16 & 20 divisis per max. com. mens. 4, sunt 5 & 4; & quoti ex 9 & 27 divisis per max. com. mens. 9 sunt 1 & 3.

ex quotis homologis 1 x 5 & 4 x 3 fit $\frac{5}{12}$.

quotus 4

sic ex $\frac{\cancel{8}}{9}$ in $\frac{5}{\cancel{6}}$ fit $\frac{20}{27}$ max. com. mens. in 8 & 6 est 2.

3 quotus.

Unde fiunt quoti 3 & 4; sed 5 & 9 non delentur, quia non habent ullam mensuram communem, sed sunt in minimis terminis.

3. Quod si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes;

duc $\frac{5}{1}$ in $3\frac{1}{4}$, resolve $3\frac{1}{4}$ in $\frac{13}{4}$ per 6. 8. hujus;

& statuantur ita, $\frac{5}{1} \times \frac{13}{4}$ fit $\frac{65}{4}$

In speciebus duc $\frac{A}{B}$ in B, præstat B integrum in formam fractionis reducere, ut antea in Additione monui; ita, $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{1}$; & quoniam Divisio per max. com. mens. peragitur sola ejusdem expunctione, nempe utrobique deletur in dividendis; ergo in exemplo uterque terminus heterologus, *scil.* B utrobique deletur, quia B est in B. 1. & iterum B est in B semel; sed quoniam unitates nihil mutant, non exprimuntur; & factus est solum A.

E Aliter

Aliter exemplum ita ſtaret, $\quad$ I quotus.

B eſt max. com. menſ. ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{I}$ fit $\frac{IA}{I}$, hoc eſt, A.

quotus $\quad$ I

quotus E

ex $\frac{BcE}{D}$ in $\frac{M}{BcA}$ fit $\frac{Em}{DA}$ $\quad$ Bc eſt max. comm. menſu.

A quotus.

ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{Z}{I}$ fit $\frac{zA}{B}$

ex $\frac{A}{B}$ in $\frac{zA}{c}$ fit $\frac{zAq}{Bc}$

In his exemplis nulla eſt max. comm. menſura ſive litera communis in ſpeciebus per crucem; ideoque ſpecies homologæ mox in ſe multiplicantur.

In Diviſione, in hoc Capite & alibi, ante hanc lunulam) ſtat Diviſor, Quotiens autem poſt hanc (

Divide $\frac{15}{28}$ per $\frac{9}{16}$; divide homologos terminos 15 & 9 per max. com. menſ. 3; etiam & 16, 28 per ſuam max. comm. menſ. 4: & tum multiplica heterologos quotos pro quotiente: & nota, quod ſemper denominator quotientis fit ex numeratore diviſoris & denominatore dividendi. Statuatur exemplum ita,

$$\begin{array}{lcccl} & 3 & & 5 & \text{quoti} \\ \text{3 eſt max. com. menſ.} & \cancel{9} &) & \cancel{15} & (20 \\ \text{4 eſt max. com. menſ.} & \cancel{16} &) & \cancel{28} & (21 \\ & 4 & & 7 & \text{quoti} \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccl} & & & 37 & & \\ \text{5 eſt max. com. menſ.} & \frac{8}{\cancel{15}} &) & 7\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}} & (\frac{111}{8} & (13\frac{7}{8} \\ & 3 & & 1 & \text{quoti} & \end{array}$$

In

In hoc exemplo 37 fit ex 7 integro resoluto in partes, multiplicando 7 per denominatorem 5, unde fit $\frac{35}{5}$, cui adde $\frac{2}{5}$, summa erit $\frac{37}{5}$.

$\frac{111}{8}$ est impropria fractio quæ resolvitur in integros cum partibus, nempe in ($13\frac{7}{8}$ dividendo 111 per 8.

In speciebus ipse *Oughtredus* integros descripsit per modum fractionis subscripta unitate, ut $\frac{D}{1}$ $\frac{Bc}{1}$, &c.

$\frac{Ac}{C}\Big)\frac{Bc}{D}\Big(\frac{BcC}{DAc}$ $\Big\{$ In hoc exemplo per c minorem intellige cubum, ut A cubum, B cubum.

Divide $\frac{DC}{BF}$ per $\frac{DA}{BE}$ quotiens erit $\frac{CE}{AF}$.

Statuantur ita,

$$\begin{array}{lccc} & \text{quoti A} & \text{C} & \\ \text{D est max. com. mens.} & \frac{DA}{BE}\Big) & \frac{DC}{BF}\Big(& \frac{CE}{AF} \\ \text{B est max. com. mens.} & & & \\ & \text{quoti E} & \text{F} & \end{array}$$

Divide $\frac{1}{2}$ B per $\frac{1}{2}$ C; & statuantur ita,

$$\frac{C}{2}\Big)\frac{B}{2}\Big(\frac{B}{C} \quad \text{2 est max. com. mens.}$$

Divide $\frac{1}{2}$ B per $\frac{1}{5}$ C; statuantur hoc pacto,

$$\frac{C}{5}\Big)\frac{B}{2}\Big(\frac{5B}{C2} \quad \text{non datur max. com. mens.}$$

Ex methodo Multiplicationis exposita vides, quod si fractio aliqua ut $\frac{A}{B}$ multiplicetur per denominatorem B, fiet productus tantum numerator A, hoc modo, $\frac{A}{B}$ in $\frac{B}{1}$ fit $\frac{AB}{B}$ hoc est, A, quod si species sint mixtæ, ut $\frac{A+B}{C}$ in $\frac{E+D}{E}$ possis per leges Additionis easdem prius in unam fractionem compingere,

ita, $\frac{Ac+B}{C}$ in $\frac{Eq+D}{E}$ fiet $\frac{AcEq+AcD+BEq+BD}{CE}$.

Similiter si fractiones sint compositæ,

duc $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ in $\frac{E}{F}+\frac{G}{H}$ pro $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ scribe $\frac{DA+BC}{BD}$.

& pro $\frac{E}{F}+\frac{G}{H}$ scribe $\frac{EH+FG}{FH}$ tum operatio stabit hoc pacto, ex

$\frac{DA+Bc}{BD}$ in $\frac{EH+FG}{FH}$ fit $\frac{DAEH+DAFG+BcEH+BcFG}{BDFH}$.

Si velles unitatem designare per quemlibet denominatorem, puta B, scribe $\frac{B}{B}$.

Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21, multiplica 21 per $\frac{2}{7}$, nam ut 1 $\frac{2}{7}$: : 21. 6. vel ut 7. 2 : : 21. 6. nam integer 1 valet $\frac{7}{7}$ ac si esset ut $\frac{7}{7}\frac{2}{7}$: 21. 6.

CAP.

CAP. XI.

Via ad Æquationem analyticam sternitur.

1. SUnto duæ magnitudines, major & minor; dico cubum è summa utriusque constare, ex cubo majoris plus triplo quadrato majoris ducto in minorem, plus quadrato triplo minoris ducto in majorem plus cubo minoris; quod brevissime & clarissime phantasiæ juvandæ gratia symbolis ita exprimatur;

Dico, $C : A+E. = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec.$

$A + E$, sive summa duarum magnitudinum appellatur binomium. $A-E$, sive differentia appellatur residuum sive apotome, ut ex 10 Elem. discas.

2. Quoniam eadem magnitudo variis symbolis exprimi potest hinc emergunt æquationes, *scil.* summa designari potest vel per Z, vel $A + E$; ergo $Z=A+E$. Differentia exprimitur vel per X, vel per $A-E$; erg. $X=A-E$ quadretur utraque pars æquationis erit $Zq = Aq + 2AE + Eq$: etiam & $Xq = Aq - 2AE + Eq$; ideoque $Zq - Xq = 4AE$: nam per Sect. 4. Cap. 3. ex $Aq+2AE+Eq$ tolle $Aq-2AE+Eq$, restabit $Aq +2 AE + Eq-Aq+2AE-Eq$; & expunctis $+Aq+Eq$ propter $-Aq-Eq$, relinquitur $4AE= Zq-Xq$; & divisa utraque parte per 4, erit $\frac{Zq-Xq}{4} = AE$: pariter $Z+X=2A$: nam per Cap. 2. ad $A+E$ adde $A-E$; ita stabit exemplum, $A+E+A-E$, hoc est, $2A$; & quoniam $Z+X=2A$, ideo dividendo utramque partem per 2, erit $\frac{Z+X}{2}=A$.

Hujusmodi æquationes sunt etiam theoremata, ex.gr. 4. 2. Elem. eleganter exprimitur in hac æquatione; nempe, $Zq = Aq + 2AE + Eq$.

Et facile est horum theorematum cumulum augere, quoniam $Z\text{ɔ} = Aq + Eq$ & $X\text{ɔ} = Aq - Eq$: ergo, $Z\text{ɔ} + X\text{ɔ} = 2Aq$ & $Z\text{ɔ} - X\text{ɔ} = 2Eq$: ergo $\frac{Z\text{ɔ}+X\text{ɔ}}{2} = Aq$ & $\frac{Z\text{ɔ}-X\text{ɔ}}{2} = Eq$ sic etiam quoniam $2A = Z + X$; ergo quadrando utramque partem, $4Aq = Zq + 2ZX + Xq$; & dividendo per 4, $Aq = \frac{Zq + 2ZX + Xq}{4} = \frac{Z\text{ɔ}+X\text{ɔ}}{2}$

Nota, quod est magna differentia inter ÆEq & AEq; quippe ÆEq fit ex AE in se; AEq fit ex AE in E tantum.

3. Sit $A = 8$. $E = 4$ summa Z est 12, ergo $Z - A = E$, id est, $12 - 8 = 4$.

5. E sive magnitudo minor est $= \frac{SA}{R}$ quod sic probatur; ut, $R.S :: A. \frac{SA}{R}$

Virtute aureæ regulæ ducatur S in A, & dividatur producta magnitudo SA per R, quotiens, *scil.* $\frac{SA}{R}$ erit terminus quartus proportionalis, qui (si major sit A) necessario minor erit; & ad A in ratione data R ad S.

Ad A adde $\frac{SA}{R}$ *scil.* majorem ad minorem, summa erit per Cap. 9. $Z = \frac{RA + SA}{R}$ quadretur major & fit

fit Aq, quadretur minor, *scil.* $\frac{SA}{R}$ & fit per Cap. 10. *De multiplicatione fractionum* $\frac{Sq\,Aq}{Rq}$ ad $\frac{Sq\,Aq}{Rq}$ adde Aq, & per Cap. 9. Z$\supset = \frac{Rq\,Aq + Sq\,Aq}{Rq}$

CAP. XII.

De Genesi & Analysi potestatum.

1\. RAdix, quadratum, cubus, quadrato-quadratum, appellantur potestates; quia radix quæ (ducta in unitatem) seipsam potest, etiam aliquoties in se continua multiplicatione ducta, potest (verbo *Euclideano*) id est, valet efficere illos numeros ut ex 2 radice in se fit 4 quadratum, ex 2 in 2 in 2 fit 8 cubus, ex 2 x 2 x 2 x 2 fit 16 quadrato-quadratum.

Et ex ista continua multiplicatione singularium
2\. radicum omnium infra 10 facta est tabella prior, in qua prima series descendens est radicum; secunda est quadratorum; tertia cuborum, &c. ideoque supra notantur literis symbolicis l. q. c. qq. qc. &c. & figuris numeralibus $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ quæ sunt potestatum indices, ut jam ante exposuimus.

Et nota hic quod *Oughtredus*, quintanam potestatem cujus hic index est $\boxed{5}$ & qc vocat quadrato-cubum, quam alii vocarunt surdesolidum ex additione surdi ad solidum, quia non habet radicem quadratam

vel cubicam ut quadrato-quadratum habet, habet nempe radicem quadratam, quæ radix & ipſa habet radicem quadratam; ut radix qu. 16 eſt 4, cujus radix quadrata eſt 2.

Poteſtatem ſextanam appellarunt illi, & cum iis *Carteſius*, quadrato-cubum, quia eſt quadrati cubus, ut 64 eſt cubus 4, qui eſt numerus quadratus, eſt etiam illa ſextana poteſtas quadratus cubi, ut 64 eſt quadratus 8, qui eſt cubus è 2. Sed quoniam indices ſunt logarithmi poteſtatum, ſe addentes atque ſubtrahentes prout poteſtates ſe multiplicant & dividunt, maluit author quintanam poteſtatem, ut 32, appellare quadrato-cubum, quanquam ſit neque quadrati cubus neque cubi quadratus, fit tamen ex multiplicatione quadrati 4 in cubum 8; ſic ex q in c (qui ſunt indices ſymbolici) per ſpecioſam multiplicationem fit q c; ideoque à ſymbolo ſuo q c merito hæc poteſtas mutuare poſſit nomen quadrato-cubi.

3. In ſpeciebus, ex multiplicatione A+E, fiunt poteſtates à radice binomia cujus majus nomen eſt A, minus E, ut ſi 12 ſecetur in duas partes, 8 majus nomen, & 4 minus, quæ faciliora ſunt quam ut multa explicatione indigeant; nam ex ſingularibus factis in ſummam collectis fit quadratum Aq + 2AE + Eq, ex cujus iterum multiplicati per A + E ſingularibus factis in ſummam collectis fit Ac + 3 AqE + 3 AEq + Ec. cubus; ut in loco ab Authore exponitur.

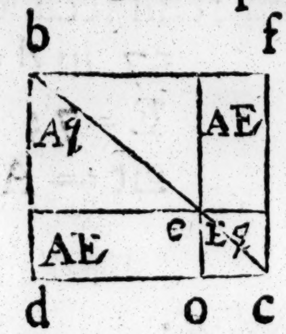
In tabella poſteriori, cujus uſus eſt pæne divinus, primo ordine habes latus binomium A + E, cujus index $\boxed{\text{I}}$ non exprimitur; in ſecundo ordine deſ-

cendendo

cendendo habes quadratum ex $A + E$, *sc.* $Aq + 2AE + Eq$, cujus index $\boxed{2}$ scribitur supra species descendentes; in tertio habes cubum $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, cujus index $\boxed{3}$ &c.

5. Et quælibet intermedia species cujusque ordinis, ut ex. gr. 10 Ac Eq, in ordine quadrato-cubico, sub indice 5, componitur ex duabus speciebus, utrinque proximis in ordine præcedente, nempe ex Ac in 4AcE ordinis præcedentis quadrato-quadratici, & ex Eq in 6 Aq Eq ordinis ejusdem: & numerus 10 affigendus in 10 Ac Eq conflatur ex 4 & 6 (qui additi faciunt 10) in 4 A c E & 6 Aq Eq, & similiter fit in aliis.

Nota autem, quod in Aq Ac & reliquis speciebus, quibus nullus numerus affigitur, subintelligendus est 1, est enim $Ac = 1Ac$ duæ extremæ potestates sunt
6,7. diagonales, & species intermediæ sunt complementa, siquidem ex collatis ultima definitione primi & secunda secundi Elem. patet quod in hac figura parallelogramma d e & e f per quæ diameter



d o = **A**
o c = **E**
d c = A + E.

non transit, sunt complementa, reliqua duo e b & e c dicuntur circa diametrum b c consistere, & appellantur diagonalia; in quadratis autem, quadrata diagonalia vocantur, quorum diagonalium alterutrum cum complementis

mentis vocatur gnomon $=AE+AE+Aq$, hoc est, $Aq+2AE$; sed usitatius & præcipue ob figuræ similitudinem minor potestas diagonalis cum complementis appellatur gnomon $=Eq+2AE$; atque ita *Oughtredus*, qui etiam „per uncias intelligit numeros comple„mentis affixos, ut in ordine quadrato-cubico 5.10. 10.5. qui una cum propriis speciebus 5 AqqE 10 AcEq 10 Aq Ec 5 AEqq Eqc gnomonem in hoc ordine constituunt.

Cum inter bina quadrata Aq Eq in ordine quadratico unica est species, nempe 2AE inter Aq Eq, quadratorum sedes unicum interponent pro complementis locum: inter Ac & Ec duæ sunt species, *sc.* 3AqE & 3AEq.

CAP. XIII.

His itaque præmissis, ad genesin Potestatum accedamus.

1. UT non modo rem, quæ per se satis plana est, sed & rei rationem intelligas, ita accipe genesin quadrati, & juxta quartam secundi Elem. dividatur 57 in duo nomina A=5 & E=7; quadratus ex 57 erit $=Aq+2AE+Eq$.

$$\begin{array}{lll} & \dot{5}.\dot{7} & \\ \hline 2500 & =Aq & \\ 700 & =2AE & \rbrace \text{ gnomon.} \\ 49 & =Eq & \rbrace \\ \hline 3249 & \text{summa.} & \end{array}$$

Revera cogitandum eſt 57 eſſe binomium compoſitum ex 50 + 7, atque ita quadratum ex majori nomine 50 fit 2500 = Aq, & duplex rectangulum ex bis 50, hoc eſt, 100 in 7 = E fit 700 = 2AE, ut facile eſt ex noſtro exemplo intelligere, ubi loci vacui circulis complentur.

In 57 ſeparantur 5 & 7 uno tantum puncto interpoſito, ita, 5 . 7 pro complementorum una ſpecie, *viz.* 2AE, quia ex natura multiplicationis ibi ſtare debet ultima figura o particularis facti 10 = 2A ex 2 ducto in 5, quæ figura 5 prima eſt in 50, in hunc modum;

50	multiplicandus	ex 2 in o fit o, loco autem hujus cyphræ punctum in facto poſuimus, quia de hac cyphra non ſumus loquuti.
2	multiplicator	
10 .	factus	

Nam hoc ordine collocandi ſunt facti particulares, nempe factus ex E in ultimo loco, ex A in penultimo, ex Aq in antepenultimo, qui in exemplo punctatur ſupra ita, $\dot{5}\,.\,\dot{7}$

2. In cubando 57 duo loci interponendi, ita 5 . . 7, pro duabus complementorum ſpeciebus, nempe 3AqE 3 A E q inter diagonales cubos Ac : Ec : & factus 525 = 3AqE ſtabit in loco antepenultimo, nam quoniam A = 50 erit 3Aq = 7500 & E = 7; ideo ultima figura in 525 facto ex 7 in 75 ſtare debet in loco antepenultimo, quia 5 in 7500 eſt figura antepenultima.

$\dot{5}\,.\,.\,\dot{7}$

$$\begin{array}{r} \dot{5}\;\;\dot{7} \\ \hline 125000=Ac \\ 52500=3AqE \\ 7350=3AEq \\ 343=Ec \\ \hline 185193 \text{ summa.} \end{array}$$

Sic in Cap. 4. ostendimus quod multiplicando 4576 per 892, facti singulares stare debent descensu obliquo, quia pro ultimo facto 36608 revera multiplicabas per 800.

$$\left\{\begin{array}{r} 9152 \\ 41184 \\ 36608 \\ \hline \end{array}\right.$$

Ita in Sectione tertia ubi latus constat ex pluribus figuris 57209, debes primum conficere potestatem ex 57, ac si latus esset 57000, & ejus duo nomina 50000=A & 7000=E fiet pro quadrato operando, ut ante, 3249000000=Aq+2AE+Eq; tum confice quadratum ex 572, ac si latus esset 57200, & duo nomina 57000 = A & 200 = E quoniam vero jam ante confecisti quadratum ex 57000, *scilicet*, 3249000000 sumatur 3249000000 pro quadrato majoris nominis =Aq, & perge pro gnomone constituendo operari ut species 2AE. Eq dirigunt, fiet 3271840000 =Aq+2AE+Eq, quod tamen in proxima operatione sumi debet pro quadrato majoris nominis 57200=Aq; minus erit 00, unde nihil conficietur, sed additis duabus cyphris (ut videbis in exemplo ad asteriscum) operatio renovanda erit: diligenter autem observabis ne teipsum frustra torseris omissam esse in exemplo Authoris

unam

unam operationem propter cyphram in penultimo loco radicis 57209, opus integrum quoad hoc ita ftaret,

Quæ dicta sunt fi intellexeris, facile ad cubum radicis ex pluribus figuris conftantis applicueris.

	32	71	84			Aq.
		0	00	0		2 AE
			0	00		Eq
*	32	71	84	00		Aq
		1	02	96	0	2 AE
					81	Eq
	32	72	86	96	81	fumma

4. Ex his quæ jam declarata funt non difficile erit reliquas etiam omnes fuperiorum generum poteftates progignere, placet hic apponere genefin quadratocubi puri; ubi quatuor puncta interponenda pro quatuor complementorum fpeciebus, nempe 5 A q q E. 10 A c E q. 10 A q E c. 5 A E q q inter quadratocubos diagonales A q c & E q c quadrocubetur 23.

Duo

Duo nomina sunt 2 & 3 revera 20 + 3.

A = 2
E = 3

2....3....2		
32	Aqc	
240	5 AqqE	gnomon.
720	10AcEq	
1080	10AqEc	
810	5AEqq	
243	Eqc	

Quadrato-cubus è 23. 6436343 summa. Aqc A = 23

Quod si placeat	2798410	5AqqE	E = 2
quadrato-cubare 232,	486680	10AcEq	
pergere licet sumendo	42320	10AqEc	
23 pro A, & 2 pro e, ac	1840	5AEqq	
si binomium compositum esset ex	32	Eqc	
230 majori nomine, & 2 minore			
	672109330432	quadrato-cubus è 232.	

Nihil hic loquitur Author de genesi potestatum adfectarum, nempe de ejusmodi potestatibus alibi tractaturus, verum ut Lector præparetur ad eas in suis locis intelligendas operæ pretium duxi ut adfectarum potestatum generationem hoc loco exponerem, breviter autem atque quatenus rei natura fert & possim dilucide.

Quid est autem Potestas adfecta?

Respondeo, Potestas adfecta tum dicitur, quando radix sive latus aliquod in se ducitur, vel semel, ut in quadrato; vel continua multiplicatione, toties quoties opus est in superioribus potestatibus; ut A + E in se fit

Aq

Aq + 2AE + Eq; iterum in A + E fit Ac + 3AqE + 3AEq + Ec: esto A + E binomia radix = L, cujus majus nomen sive latus est A, minus E; ergo Lq = Aq + 2AE + Eq, & Lc = Ac + 3AqE + 3AEq + Ec, quando (inquam) radix in se, &c. & praeterea aliquis alius numerus sive magnitudo, puta B, ducitur etiam in radicem A + E, unde fit BA + BE, magnitudo composita, addenda quadrato puro, *viz.* Aq + 2AE + Eq; unde fit quadratum adfectum, Aq + 2AE + Eq + BA + BE. In numeris, ex 4 x 4 fit 16, quadratum purum, cui addatur 2 x 4 = 8 fit 24, quadratum adfectum; haec magnitudo B appellatur co-efficiens, quia una cum illa alia in quam ducitur facit vel planum vel quadratum, & est vel longitudo vel latitudo, nempe in hoc casu ubi de quadratis agimus quae ex binis tantum dimensionibus constant. In ordine cubico, ex A + E in se, &c. fit cubus purus, Ac + 3AqE + 3AEq + Ec; & praeterea aliqua alia magnitudo, puta B, ducitur vel in gradum aliquem hujus puri cubi, ut in Aq + 2AE + Eq, unde fit BAq + B2AE + BEq, addend. ad Ac + 3AqE + 3AEq + Ec; unde fit cubus adfectus Ac + 3AqE + 3AEq + Ec + BAq + B2AE + BEq. In numeris ex 3 cubato fit 27, cui addatur 2 x 9 = 18, fit 45, cubus adfectus; & B = 2 est co-efficiens longitudo quae ducta in quadratum 9 facit solidum 18.

Vel in hoc eodem ordine cubico, praeterea aliqua alia magnitudo, puta Cq, ducatur in radicem cubi puri, nempe in A + E, unde fit CqA + CqE. addend. cubo puro Ac + 3AqE + 3AEq + *E*c, unde fit cubus adfectus, Ac + 3Aq*E* + 3A*E*q + *E*c + CqA + Cq*E*. In numeris

numeris ex 3 cubato fit 27, cui addatur 2 x 3 = 6 fit 33 cubus adfectus; & Cq = 2 est co-efficiens magnitudo plana, quæ ducta in cubi radicem 3 facit solidum 6.

Vel in hoc eodem ordine possint dari duæ co-efficientes, quarum una ducatur in radicem, altera in radicis quadratum, ut ex utriusque additione ad cubum purum fiat ille adfectus; atque ita vides cubum adfici posse tribus modis; & generaliter quælibet subsequens potestas adfici potest toties bis quoties antecedens unitate addita, ut

q.	1
c.	3
qq.	7
qc.	15
cc.	31, & c in infinitum.

Observasti forte quod in ordine cubico B co-efficientem = 2, appellavimus longitudinem, & Cq = 2 magnitudinem planam, ratio est, quia co-efficiens semper æstimatur juxta qualitatem potestatis affectæ & magnitudinis gradum in quem ducitur, ita in ordine cubico, quoniam cubus est solidum, ejus generis erunt omnes species, ita A*E*q est solidum constans ex tribus dimensionibus A x *E* x *E*; pariter Aq*E* est solidum; ideoq; in illo ordine si co-efficiens ducatur in latus quod unam tantum dimensionem habet, cogitabis co-efficientem tanquam quadratum constare ex duabus, ut in CqA + Cq*E*, quanquam per Cq intelligis tantum 2, qui numerus neque est quadratus neque planus, ita tamen æstimandus est ac si fieret ex ductu suiipsius in unitatem; ita 2 quadrat in 1 = 2 solido.

Quod si ducatur in quadratum lateris A + *E*, *scil.* BAq + B2A*E* + B*E*q, jam B erit tantum longitudo vel latitudo,

latitudo, nimirum quoniam quadratum conſtat ex duabus dimenſionibus, una tantum deſideratur in ordine cubico ut fiat ſolidum: uno verbo, heterogenea homogeneis addi vel ſubtrahi nequeunt: eſt hæc notio artis filio digna; nimirum ad lineam non potes addere ſuperficiem, ad longitudinem non potes addere planum, ad quadratum non potes addere cubum, nempe ſolidum ad ſuperficiem: jam vero quoniam magnitudines ſive numeri adficientes addi debent ad poteſtatem puram, ut fiat ex illarum additione adfecta; debent ergo illæ poteſtates adficientes eſſe ejuſdem generis cum poteſtate pura, quod fit concipiendo magnitudinem co-efficientem tot habere dimenſiones quot deſiderantur in magnitudine in quam ducitur, ut uberioris illuſtrationis cauſa, in ordine quadrato-cubico, quælibet ſpecies conſtat ex 5 dimenſionibus, nam Aqc conſtat ex A x A x A x A x A, quoniam igitur in adfectione BAqq, Aqq conſtat ex 4 dimenſionibus, *ſc.* ex A x A x A x A, ergo co-efficiens B erit tantum longitudo, quia una tantum dimenſio deſideratur; ſed in C q A c quoniam A c conſtat tantum ex tribus, co-efficiens C q conſtabit ex duabus, & in omnibus ſpeciebus iſtius ordinis ſimile reperies, nam unciæ in hoc computo non omnino conſiderantur.

Id autem tum in Geneſi tum in Analyſi obſervandum, quod prout in poteſtatibus puris ita etiam in adfectis ſingulæ ſpecies ſuas ſibi proprias ſedes vendicant; neque enim numeri ullo modo quo libet vel prout ſors tulerit, collocandi; ut clarius in exemplis patebit.

Genesis quadrati adfecti sub latere A+E & co-efficiente longitudine sive latitudine B quæ in latus A+E ducenda.

$$5\cdot7\cdot \qquad B=3$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rl}25 & Aq\\ 70 & 2AE\\ 49 & Eq\end{array}\right\}=lq\\ \left.\begin{array}{rl}15 & BA\\ 21 & BE\end{array}\right\}=Bl\end{array}\right\} lq+Bl=Cq=3420$$

3420 quadratus adfectus: quadratus purus erat in exemplo *Oughtrediano* 3249.

Genesis cubi adfecti ex duabus co-efficientibus, una B longitudine ducta in quadratum lateris =Aq+2AE +Eq; altera Cq tanquam numero plano ducto in latus A+E

$$5\cdot\cdot7 \qquad B=2$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{rl}125 & Ac\\ 525 & 3AqE\\ 735 & 3AEq\\ 343 & Ec\end{array}\right\}=lc\\ \left.\begin{array}{rl}50 & BAq\\ 140 & B2AE\\ 98 & BEq\end{array}\right\}=Blq\\ \left.\begin{array}{rl}15 & CqA\\ 21 & CqE\end{array}\right\}=Cql\end{array}\right\} \begin{array}{l}Cq=3\\ A=5\\ E=7\\ lc+Blq+Cql=Dc\end{array}$$

Dc=191862 cubus adfectus: cubus purus erat 185193.

Geneſis quadrato-cubi adfecti adjunctione planoſolidi ſub latere A+E, & co-efficiente numero quadrato-quadratico =Fqq=5

l. ſive latus eſt=23 cujus duo nom. A=2 & E=3

2 3			
32	Aqc		
240	5AqqE		
720	10AcEq	=lqc	
1080	10AqEc		
810	5AEqq		=Gqc
243	Eqc		lqc+Fqql=Gqc
10	FqqA	=Fqql	
15	FqqE		

Gqc=6436458 quadrato-cubus adfectus, purus erat 6436343: quadrato-cubus adfici poteſt 15 variis modis, difficillimum exhibebit Author ad calcem operis; numeroſam ſane poteſtatem cum omnibus adfectionibus ex quibus poteſtas quadrato-cubica adfecta conſtare poteſt: nos quibus difficilia explanare ſcopus eſt omnium è regione facillimum jam exhibuimus.

CAP. XIV.

Sequitur Analyſis, quæ eſt eductio radicis ex numeroſa poteſtate data.

1. ANalyſis poſtquam ſedes poteſtatum diagonalium pro ſuo quaſque juxta tabulam poſteriorem genere, punctis (poſito primo puncto ſub loco unita-

tum) binis pro quadrato, ita, 3272869681; ternis pro cubo, ita, 487237601580329; & quaternis pro quadrato-quadrato, &c. Poſtquam, inquam, analyſis ita ſedes poteſtatum diſtinxerit, primo ex figuris primi à ſiniſtro puncti poteſtatem diagonalem tollit, nempe, 25 =Aq ex 32, & relinquitur 7 ſcribendus ſupra figuram 2; latuſque ipſius, quod vocetur A=5, ſcribit in margine poſt lunulam quotientis, (eſt enim extractio radicum, quaſi diviſio quædam) tum numero reliquo (ad proximum uſque punctum) qui gnomonem intelligitur continere, id eſt, ad 772, per diviſorem ex latere A invento legitime conflatum, id eſt, 10=2Aq propter 2AE, & in cubo compoſitum ex 3Aq & 3A, (propter complementa 3AqE & 3AEq, ſedibus ſuis obſervatis, id eſt, unitates diviſoris particularis 3A ſcribantur uno loco propius verſus dextram quam 3Aq;) per diviſorem (inquam) ita legitime conflatum, ſecundum latus E quærit, id eſt, quoties 10 in 772? Reſpondetur 7=E, per quod demum gnomonem perficit, multiplicando diviſorem per E=7 fit 2AE=70; & quadrando 7 fit 49=Eq; tum ſumma auferetur ex reſiduo poteſtatis reſolvendæ, & ſic integra duorum primorum ſingularium laterum in duobus primis punctis contenta poteſtate dempta, reſtabit ad tertium uſque punctum; gnomon pro tertio ſimiliter latere eruendo, nempe, operationem renovabis ſumendo totum latus inventum 57 pro A, & per A legitime conficiendo novum diviſorem, operando ut ante ſub proximo puncto pro tertio latere, id eſt, tertia figura (id eſt, 2 in 57209) eruenda.

2. Si

2. Si peracta analysi aliquid restet, punctationes circulorum, quot opus erit, statuendæ pro suo genere, id est, binæ & binæ cyphræ addantur pro quadrato, ternæ & ternæ pro cubo, &c. ut si quadratus resolvendus fuisset 3272869995, numerus non fuisset rationalis, sed post peractam ultimam operationem superfuisset 314; ideoque additis duabus cyphris vel pluribus binis, ut placuerit, ita, 314 00 00 00, possis pergere operando ut ante pro decimali fractione.

Vulgares Arithmetici volunt reliquum quod superest numeratorem esse fractionis, cujus denominator erit duplum radicis cum unitate addita, id est, 2A divisor cum unitate addita, quia 2A perfecte dividit 2AE, & relinquitur E, sed revera præter 2AE continetur & Eq in gnomone.

Similiter in cubo reliquum iterum sumunt pro numeratore & pro denominatore triplum radicis quadratum = 3Aq, & triplam radicem = 3A, cum unitate addita.

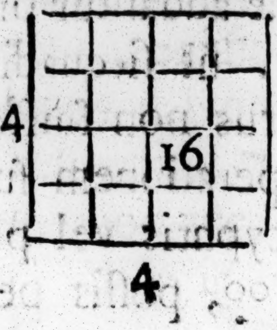
Et revera ex quadratorum adscensu sine incremento patet ratio quare vulgares arithmetici unitatem addunt, nam esto 4 quadratus numerus ex 2 = A. 2A cum unitate addita, id est, 5 addatur ad 4, fit proximus quadratus 9, cujus radix 3 = A: 2A cum unitate, id est, 7 addatur ad 9, erit 16 quadratus ex 4, &c. unde patet quomodo series quadratorum per additionem construatur.

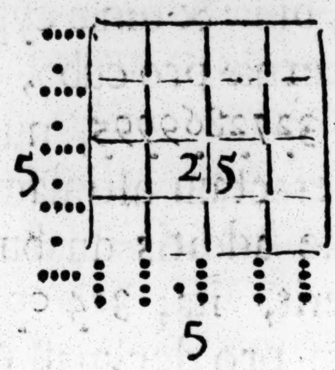
Atque idem patet ex his schematibus, esto 16 quadratus ex latere 4, & augeatur schema æqualiter novo gnomone hîc punctato, fit proximus quadratus 25, unde quibusdam fractio gnomon appellatur, eo quod

 constat

constat ex duplici latere pro complementis & minori diagonali quadrato.

Vide 5. cap. 15.





Cubus per 6 ascendit.

Series quadrat. pro serie cuborum.

Radices	quadrat.	
1	1	
		3
2	4	
		5
3	9	
		7
4	16	
		9
5	25	
&c.		

Radices	cubi		
1	1		
		7	
2	8		12
		19	
3	27		18
		37	
4	64		24
		61	
5	125		
&c.			

Ascendunt quadrat. addendo differentias 3. 5. 7. 9, &c. quorum differentia est 2.

In serie cuborum 12. 18. 24, &c. quorum differentia est 6, sunt differentiæ differentiarum, cuborum nempe 7. 19. 37. 61.

Aliter

Aliter pro cubis	C.0. = 0
Differentiæ numerorum	C.1. = 0+1+6 x 0 = 1
0.1.3. 6. 10. &c. sunt	C.2. = 1+1+6 x 1 = 8
1. 2. 3. 4. &c.	C.3. = 8+1+6 x 3 = 27
	C.4. = 27+1+6 x 6 = 64
	C.5. = 64+1+6 x 10 = 125
	&c.

CAP. XV. *De Lateribus surdis.*

1. SI quotlibet numeri ut A. M. N. E sint ∺ erit ut primus A ad ultimum E; sic potestas primi Ac cujus index 3 per unitatem minor est numero terminorum A. M. N. E. ad potestatem similem secundi Mc cujus index etiam 3.

Nam per theor. 14. 6. hujus; AMN.MNE :: AAA (Ac) MMM (Mc.

sed MN x A. MN x E :: A. E. per 17. 7. el.

erg. ut A. E :: Ac. Mc. quod erat dem.

3. 4. Numeri plani similes sunt in duplicata ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum; consule 19 & 20. 6. el. & 11. 8. el. una cum notis in 15. 6. hujus.

Et generaliter omnes figurati similes plurium dimensionum sunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicata numero dimensionum, ex quibus componuntur; nempe si quatuor sint dimensiones A.B.C.D. unius, & quatuor E. F. G. H. alterius, erit figuratum

ABCD ad figuratum simile EFGH in quadruplicata ratione laterum homologorum. A. E. hoc est, R. S.

sc. Rqq ad Sqq est in quadruplicata ratione R. S. hoc est A. E.

$$\text{Quia}\left.\begin{array}{l}\text{A. E :: R.S.}\\ \text{B. F :: R.S.}\\ \text{C.G :: R.S.}\\ \text{D.H :: R.S.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{erit per multiplicationem}\\ \text{ABCD.EFGH::Rqq.Sqq.}\\ \text{consule 14 \& 15. \textit{6}. hujus.}\end{array}$$

5. Latus numeri dicitur surdum, quando numerus non est verus sui generis figuratus, sive rationalis, quo casu radix ejus exprimi nullo pacto potest in numeris, nimirum, vel sine fractione, vel cum fractione, ita ut (ex causa in quadratis) radix quadrata talis numeri in se ducta, faciat numerum quadratum cujus est radix, quod fieri oporteret; sic *r* 10, sive radix quadrata 10, est $3\frac{1}{7}$ circiter, sed $3\frac{1}{7}$ in $3\frac{1}{7}$ non faciet 10, cujus est radix; jam quoniam radix surda non potest exprimi & proinde neque audiri, appellatur surda; radix surda autem sic notatur, *r* q 6, *r* c 4, *r* qq 20, *r* qc 13, hoc est, latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13, &c. Si nota radicalis (*r*) per se ponatur, ut *r* 5, intellige radicem quadratam.

16 & 9 sunt numeri figurati; & *r* 16 est 4, *r* 9 est 3. *r* 16 + *r* 9 est radix composita, & valet 7; sed quandoque intelligere potes radicem universalem; ut *r* u.(16 + *r* 81) intelligis 5 radicem è 25; *scil.* radix quadrata extrahatur è *r* 81, hoc est, 9 addita ad 16, id est, è 25. Sed hæc melius discas ex usu Authorum; alii etenim aliter scribunt.

Aggreditur

Aggreditur *Oughtredus* operationes quæ fiunt circa surdas radices, *scil.* additionem, &c. quidam existiment, quandoquidem hîc & sectione sequenti multiplicatione opus est; quod ob eam causam sectiones 9. & 10. hanc præcedere debuissent, nos autem authorem nostrum sequemur: qui,

Quoniam latera surda incommensurabilia haud aliter adduntur vel subtrahuntur quam per signa + sive —, ut *r* q 7 + *r* q 4, & *r* c 10 — *r* c 5, uti liquet in sect. 8. hac sexta sectione docet, quando latera sunt commensurabilia, nempe quando sunt ut numerus ad numerum, prout de magnitudinibus demonstravit *Euclides* in 6. 10. el. sunt enim quædam magnitudines quarum habitudo sive ratio unius ad alteram nullis numeris exprimi potest: sic latus quadrati est diametro ejusdem incommensurabile per ult. 10 el. nam si latus *a b* dividas *a*  in partes quot libuerit, puta 4, vel ullas alias *b* *d* non potes dividere diametrum *a d* in tales partes, ut in 5 vel in 6 vel in 7, vel ullo alio numero comprehensas quin semper aliquid supererit nullis numeris explicabile; atque ita latus non erit ad diametrum in ratione numeri ad numerum: sed docuit *Euclides* 12. 6. el. quomodo duæ lineæ (duæ inquam lineæ) in eadem ratione inveniantur; quinetiam nulla linea est cujus radix quadrata extrahi nequit, id est, exprimi nequit geometricè in alia linea.

Tum in hac sectione docet author quomodo scire potes an duo latera *r* q 12 & *r* q 147 sint commensurabilia necne, *sc.* si dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram *r* q 3, quoti fiant rationales, id est, possint exprimi in numeris; sic, divide *r* q 12 per

per r q 3, oritur r q 4 = 2; divide etiam r q 147 per r q 3, oritur r q 49 = 7; est autem per 2. 6. hujus.

r 12. r 147 :: r 4. r 49

erg. r 12. r 147 :: 2. 7.

7. Adduntur autem atque subtrahuntur latera surda commensurabilia r 12 & r 147, si summæ, hoc est, 9, vel differentiæ 5 numerorum ipsis similium inventorum, 7 & 9, homogenea potestas, vel potius, potestatis radix, hoc est, pro additione r q 81, pro subtractione r 25, ducatur in communem ipsorum mensuram r 3, erit pro addit. ex r 3 in r 81, summa r 243; pro subtractione, ex r 3 in r 25, erit differentia r 75.

In secundo exemplo addit r 12 + r $\frac{27}{4}$, quod ut fiat, resolvit integrum 12 in fractionem ejusdem denominationis cum r $\frac{27}{4}$, multiplicando 12 per 4, unde fit r $\frac{48}{4}$ = r 12; & tum in numeratoribus partium r 48 & r 27 operationem perficit; communem denominatorem tandem summæ subscribens.

max.c.m. r 3) r 48 radices addendæ & dividendæ per r 27 max. c.mens. r 3. (r 16 = 4, quoti, r 9 = 3 } num. sim. inventi

summa quæsita } r $\frac{147}{4}$ homogenea potest. r 49. 7 sum. numer. similium inventorum. ducenda in r 3.

in altero exemplo nempe { r $\frac{245}{12}$ + — r $\frac{5}{12}$ } quoniam 12 denominator idem est in utraque fractione, operandum est ut in exemplo priori.

Exemplum aliud esto, ad r 18 adde r 32, si dividantur per maximam ipsorum communem mensuram, *scil.* r 2, orientur quoti r 9 = 3 & r 16 = 4.

erg.

erg. $r\,18.\ r\,32 :: r\,9.\ r\,16 :: 3.\,4.$ ergo commensurabiles.

Jam summa ex $3 + 4$ est 7, quadretur 7, fit 49; erg. $r\,49$ erit homogenea potestas: duc igitur $r\,49$ in $r\,2$, *scil.* max. com. mens. fit $r\,98$ pro summa quæsita.

Rem ipsam accepisti, accipe & rei rationem.

Ut addas $r\,147 + r\,12$, primo, dividis utrumque per $r\,3$, max. com. mens. & oriuntur quoti $r\,49$ & $r\,4$; sed quod divisio dissolvit, multiplicatio conficit, ergo si separatim ducas $r\,3$ in $r\,49$, restituetur $r\,147$; & si ducas $r\,3$ in $r\,4$, restituetur $r\,12$; jam quoniam $r\,49 = 7$ & $r\,4 = 2$ conjunctim faciunt $9 = r\,81$, fiet, (ducendo $r\,3$ in summam, *viz.* $r\,81$,) fiet inquam, $r\,243 = r\,147 + r\,12$, uti manifestum est per 1. 2. el. quod erat dem.

Ex 4. 2. el. demonstratur aliqualis modus addendi radices etiam incommensurabiles, quoniam per 4. 2. Qu. $A + E = Aq + 2AE + Eq$.

Sect. 8. Esto binomium $r\,7 + r\,4$, *scil.* $r\,7 = A$ & $r\,4 = E$ ad summam quadratorum è nominibus $r\,7 = 7$ & $r\,4 = 4$, ad summam, inquam, quadratorum, $11. = Z$; addatur duplum è nominibus rectangulum, hoc est, $r\,7$ in $r\,4$, fit $r\,28$; in $2 = r\,4$, fit $r\,112 = 2AE$: erg. radix quadr. universalis hujus aggregati, nempe $r\,(11 + r\,112)$ erit summa ex $r\,7 + r\,4$.

*E*t quoniam per 7. 2. el. $Aq + Eq - 2AE = Q: A - E$, subtrahendo $A = r\,7 - r\,4 = E$, differentia erit $Aq + Eq = r\,(11 - r\,112) = 2AE$.

Modo operandi in quadraticis intellecto, cubicæ operationes una facillime intelliguntur;

max.

$$\text{max.c.m. } r\,5)\begin{matrix} r\,c\,1715 \\ \\ r\,c\,40 \end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{rad.cub.addend.} \\ \text{\& dividend. per} \\ r\,5,\text{ max.c.m.}\end{matrix}\right.\left(\begin{matrix} r\,c\,343 = 7 \\ \text{quoti} \\ r\,c\;\;8 = 2 \end{matrix}\right.$$

(numeri similes inventi.

$$\begin{matrix}\text{sum. quæsit. } r\,c\,3645 \\ \text{differ. quæs. } r\,c\,625\end{matrix}\;\text{homog. potest.}\left\{\begin{matrix} r\,c\,729 & 9 & \text{sum. nu. similium} \\ r\,c\,125 & 5 & \text{diff. nu. similium}\end{matrix}\right.$$

ex quadratis 4 x 16 fit 64 : 1 erg. per 4. 4. hujus. 1. 4 : : 16. 64. ergo ;

9. Per 24. 8. elem. 64 erit quadratum. Vide scholium Clavii in 2d. 9. el. una cum propos. 4. 9. el. & cap. 15. sect. 9. hujus.

*E*t quoniam quadrata sunt proportion. 1 4 : : 16 64 erg. per 22. 6. etiam & latera sunt proport. 1 2 : : 4 8 tum & quia per 11. 8. quadrata sunt in duplicata ratione laterum : ergo per theorema catholicum quadrata & latera sel similiter multiplicant & dividunt.

$$\left.\right\}\begin{matrix} 4 \text{ x } 16 = 64 \text{ quadr.} \\ 2 \text{ x } \;\;4 = \;\;8 \text{ latera.}\end{matrix}$$

In speciebus, quadrato Aq Eq diviso per quadratum, *sc.* Bq, oritur quotus, *sc.* $\frac{AqEq}{Bq}$ qui est quadratus ex $\frac{AE}{B}$ in se.

10. Quando duæ radices ejusdem generis, ut ex. gr. quadraticæ, multiplicandæ aut dividendæ sunt, ut $r\,7$ in $r\,3$, operatio fiat in numeris sub signis radicalibus contentis, ut (7 in 3) & producto vel quoto sui generis signum præfigendum ; ut factus ex $r\,7$ in $r\,3$. est $r\,21$; & divide $r\,21$ per $r\,7$, oritur $r\,3$.

Propter satisfactionem tuam facile scire potes hunc operandi modum esse : verum experiendo in radicibus

bus rationalibus ex r 4 = 2 in r 49 = 7, fit r 196 = 14 = 2 in 7.

Demonstratio autem geometrica petenda ex 22. 6. el. dico, ex r 3 in r 7, factum iri r 21. nam quoniam ut 1. r 3 : : r 7 ad factum per 4. 4. hujus, & per 22. 6. quod 1. qu. r 3 : : qu. r 7 ad quadratum facti. hoc est, 1. . 3 : : 7. 21. *sc.* quadratum facti. erg. r 21 fit ex r 3 in r 7, quod erat dem. Vide Amicum meum eruditissimum, *Is. Barrow* in 22. 6. Atque jam vides cur *Oughtredus* hanc sectionem cum nota illativa inchoavit, *sc.* quare laterum surdorum, &c.

In sectione 11. accedit author ad multiplicationem & divisi. laterum surdorum heterogeneorum, quæ idcirco prius ad idem genus reducenda fere ad eum modum quo fractiones ad eundem denominatorem revocantur; nam quemadmodum fractiones, dum ad eundem denominatorem revocantur valores suos non mutant, ita neque mutantur valores radicum surdarum quum ad idem genus revocantur: nam ut ex tabella priori patet r cc 64 = r q 4 = 2: ideoque in exemplo r cccc 1000 = r qq 10, & r cccc 49 = r cc 7, regula est, reducuntur ad idem genus dividendo indices utriusque potestatis propositæ per maximam ipsorum communem mensuram, & multiplicando tum indices per alternos quotos tum ipsas potestates in species alternis quotis cognomines, ut si ad multiplicandum vel dividendum proponantur r qq 10 & r cc 7, primo, reducuntur ad r cccc 1000 & r cccc 49, cubando 10 & quadrando 7.

In exemplo indices continentur in rectangularibus figuris ita, $\boxed{4}$ est index quadrato-quadraticus; 2 ante lunulam est maxima communis mensura:

& fit

& fit operatio per crucem, ita,

12 index ex alterna multiplicatione

max.cõ. m.2) $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ indices

2 3 quoti

1000 49 poteſtates in ſpecies alternis quotis cognomin.

r $\boxed{12}$ r $\boxed{12}$ Index poteſtatum reductarum, ſcil. 12. qui index CCCC.

max.co.m.2. quæ dividit 4 & 6) r $\boxed{4}$ 10 r $\boxed{6}$ 7 poteſtates reducendæ, nempe 10 & 7.

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ quoti

1000 fit ex 10 cubato, propter alternum quotum 3, qui eſt index cubi; 49 fit ex 7 quadrato, propter alternum quotum 2, qui eſt index quadrati.

Tum demum fiat multiplicatio, ut ante oſtenſum eſt in homogen.

ex *r* cccc 1000 in *r* cccc 49 fit *r* cccc 49000.

exemplum eſto facilius in numeris rationalibus, quod fidem faciat modum operandi in ſurdis eſſe verum; nam ex *r* q 9 = 3 in *r* qq 16 = 2 fit 6, qui eſt radix qq 1296.

r $\boxed{4}$ 81 r $\boxed{4}$ 16 poteſtates reductæ

max. c.m. 2) r $\boxed{2}$ 9 r $\boxed{4}$ 16 poteſtates reducendæ

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ quoti.

ex *r* qq 81 in *r* qq 16, fit *r*.qq 1296 = 6.

Si multiplicares ſurdam radicem per numerum integrum, attollendus eſt integer ad poteſtatem homogeneam, cui ſignum radicale ſui generis præponendum, ut ex 5 in *r* 9 fit *r* 225, attollendo integrum 5 ad 25, cui præpone ſignum rad. *r* 25, ut ex *r* 25 in *r* 9 fiat *r* 225.

Si duas eaſdem radices quadraticas adderes, earum una multiplicetur per 2, hoc eſt, *r* 4, ut ex *r* 16 + *r* 16,

erit

erit ſumma *r* 64; nempe ſi *r* 16 multiplices per *r* 4=2; pariter ſi tres eaſdem velles addere, multiplicabis per *r* 9=3; ſi quatuor, per *r* 16=4: ſic in exemplo cubico *r* c 32 duplicabitur attollendo 2 ad *r* c 8=2, triplicabitur attollendo 3 ad *r* c 27=3, *ſcil.* ex *r* c 32 in *r* c 27, fiet *r* c 864.

12. In fractionibus, ſi $\frac{22}{7}$ multiplicares per *r* Aq, attolle $\frac{22}{7}$ ad *r* $\frac{484}{49}$, radix qu. quadratur, & cubica cubatur, &c. tantum delendo ſignum radicale, ſic ex *r* 64 in *r* 64, fit 64.

13. Si latus poteſtatis cujus index eſt numerus compoſitus, ut in *r* cc 64, index cc eſt 6, qui componitur, ſive fit ex 2 in 3; ſi igitur *r* cc 64 multiplicandum ſit ſecundum exigentiam indicis componentis 2, qui index quadrati, id eſt, ſi quadrandum ſit, ut litera Q, indicatur ita, Q, *r* cc 64; tum, inquit author, latus alterius ſpeciei, id eſt, componentis, nempe indicis 3, id eſt, latus cubicum, propter 3, qui index eſt cubi, numero ſpeciali 64 ſolum præfigatur, ita, *r* c 64: eſt hæc regula contractionis cauſa, nam ſi per regulas antedictas quadrares *r* cc 64 ex *r* cc 64 in *r* cc 64, fit *r* cc 4096 =4; eſt etiam *r* c 64=4.

Ita ſi *r* qq 16 quadrandum ſit, quoniam 4=2 x 2 eſt index qq, ſcribe *r* q 16; quoniam 2, altera pars componens, eſt index q.

14. Si magnitudo plurium nominum ducatur in ſeipſam cum uno ex ſuis ſignis mutato expurgabitur unum nomen: eſt hic locus ſatis obſcurus: expurgabitur, id eſt, expungetur + *r* 2 propter − *r* 2, tum multiplica 3 + *r* 5 per 3 + *r* 5, quod ut fiat, attolle (ut ante oſtenſum eſt) integrum 3 ad *r* 9; tum

duc

duc $r\,9 + r\,5$
in $r\,9 + r\,5$

fit $r\,81 + r\,45$
$+ r\,45 + r\,25$ } adde $r\,45$ ad $r\,45$ i. e. multiplica $r\,45$ per $r\,4 = 2$, fiet ($r\,180$

summ. $r\,81 + r\,180 + r\,25$.

sed $r\,81$ & $r\,25$ sunt rationales, & valent $14 = 9 + 5$, ergo totus factus erit $14 + r\,180$: non dubitabo sectionem hanc erroris alicujus accusare, quod patet ex his numeris rationalibus, nam ex $3 + r\,9 + r\,4$ in $3 + r\,9 - r\,4$, fit tantum 32; sed ex $3 + r\,9$ in $3 + r\,9$, fit 36. ex $A + E + B$ in $A + E - B$, fit $Aq + 2\,AE + Eq - Bq$ sed ex $A + E$ in $A + E$, fit $Aq + 2\,AE + Eq$; post expurgationem ergo tollendum Bq, nempe in exemplo $= 2 =$ Qu. $r\,2$. tollend. inquam ex facto $14 + 180$, ut fiat $12 + 180$.

Numeri compositi sequuntur regulas simplicium.

Radices universales multiplicantur ut compositæ, præponendo tandem signum universale, ut ex $r\,(7 + r\,3)$ in 2, fit $r\,(28 + r\,48)$ attollendo 2 ad 4, & tum multiplicando $7 + r\,3$ per 4, præfigendo demum signum radicale; sed vide sis, ut 4 attollatur ad $r\,16$ quando multiplicas $r\,3$ per 4; atque idem observandum erit in sequenti exemplo pro duplo rectangulo.

Adduntur plerumque & subtrahuntur per signa + & —, vel addantur radices (præsertim quando similes sunt) per signum +, vel plus, ut sint tanquam duo nomina, & tum per 4 & 7. el. 2. ad summam quadratorum addes, vel auferes, duplum rectangulum, ut si addendæ sint hæ duæ radices universales $r\,(12 + r\,6)$ & $r\,(12$

& $r(12 - r6)$ ducatur hoc compositum $r(12 + r6) + r(12 - r6)$ in seipsum, & producetur numerus $24 + r552$ hujus radix quadrata, nimirum $r(24 + r552)$ erit summa duarum radicum propositarum, nam radix quadrata facti ex summa in se ducta est ipsa summa.

Sepositis nostris, poteris proprio marte experiri, quomodo numerus prædictus; *viz.* $24 + r552$ multiplicando producitur, si forte hæseris, est enim accurata observatio regularum, quandoque lubrici negotii, legeris hæc quæ sequuntur.

Nempe singula nomina quadrantur abjiciendo signa radicalia, & summa quadratorum erit $12 + r6 + 12 - r6$; id est, expungendo $r6$, propter signa $+$ & $-$, erit, inquam, summ. quadr. $= 24$.

Tum, pro rectangulo, ex nominibus duc $r.u.\ 12 + r6$ in $r.u.\ 12 - r6$, fiet $r(144 - r36,)$ * *viz.* expunctis expungendis; & pro duplo rectangulo multiplicando per $2 = r4$, multiplica 144 per 4, fiet 576, nondum apponendo signum radicale, sed prius multiplicando $r36$ per 4, id est, per $r16$, fiet $r576$, cujus radix quadrata, *viz.* 24, sublata ex 576, rest. 552, cui demum signum radicale præfigendum $r552$, adeo ut $24 + r522$ sit nominum additorum vel binomii quadratum.

Videbis modum elegantem binomiorum quadrand. c. 16. sect. 10. ex. 1.

Species easdem regulas servant ad amussim;

r DAAA & r DABq sunt commensurabiles quia habent communem mensuram, *scil.* r DA, per quam di-

* Vel sic, fiet $r(144 - r36)$ id est, $r108$, quia $r36 = 6$. Et pro duplo rectangulo ex $r138$ in $r4 = 2$ fiet $r552$.

vidantur, & quotientes erunt rationales, *ſc.* *r* Aq=A & *r* Bq=B.

Exemp. add. & ſub. in ſpeciebus.

max. c.m. *r* DA) *r* DAc radices *r* Aq } quoti =A } numeri
r DABq ſurdæ *r* Bq } =B } ſimiles inventi

A+B ſum. *r.u.* Aq+2AB+Bq. Homogenea poteſtas
A—B diff. *r.u.* Aq—2AB+Bq. Homog. pot. multiplicentur poteſtates per max. com. men.
erit *r.u.*DAc+2DAqB+DABq. Summa quæſita
& *r.u.*DAc—2DAqB+DABq. Differ. quæſ.

Aliud exemplum, *r* 75Aq & *r* 27Aq.

max.c.m. *r* 3) *r* 75Aq. *r* 25Aq=5A } Latera quotorum rationalium, ſeu numeri
r 27Aq. *r* 9Aq=3A } ſimiles inventi.

8A ſum. *r* 64Aq Homog.pot. *r* 192Aq. Sum. quæſita.
2A diff. *r* 4Aq Homog.pot. *r* 12Aq. Differ. quæſita.

ad *r* 12Aq adde *r* $\frac{27}{4}$ Aq, ſive *r* $\frac{27\text{Aq}}{4}$ reducantur ad eandem denominationem, & ſcribe (per c.9.1.) *r* $\frac{48\text{Aq}}{4}$ + *r* $\frac{27\text{Aq}}{4}$ tum in numeratoribus partium fiet operatio, ut ante, dividendo per *r* 3, max. com. menſ. tandem ſubſcribendo communem denominatorem.

Ad *r* C adde *r* $\frac{\text{Aqc}}{\text{Bq}}$ reducantur ad eandem denom. ut ſint *r* $\frac{\text{CBq}}{\text{Bq}}$ & *r* $\frac{\text{Aqc}}{\text{Bq}}$ & fiat in numeratoribus partium operatio dividendo per max. com. m. nempe *r* C.

fit exem. in rationalibus A=2. 16Aq=64 cujus radix 8 } ſum. 12.
ad r. 16Aq adde 2A=r 4Aq=16 cujus radix eſt 4 }

max.c.m. *r* 4Aq) *r* 16Aq. *r* 4 } quoti =2 } numeri ſimiles.
r 4Aq. *r* 1 } =1 }

ſum.3=*r* 9 in max.c.m.=*r* 4Aq fit 36Aq=*r* 144=12.

ad

ad $r\,\frac{8}{2}$ adde $r\,\frac{128}{2}$ ejuſdem denominationis $2+8=10$.

$$\text{max.c.m. } r\,8\Big)\begin{matrix} r\,8 & r\,1=1 \\ r\,128 & r\,16=4\end{matrix}\Big\}\begin{matrix}\text{Sum. } 5 \text{ Hom. pot. } r\,25 \\ \text{in } r\,8 = r\,\frac{200}{2} = 10.\end{matrix}$$

Similiter operandum in radicibus cubicis, &c.

Pro multiplicatione ſpecioſa eſto Authoris exemplum:

$r\,\boxed{12}$ Ac $r\,\boxed{12}$ Bqq poteſtates in ſpecies alternis quotis cogno.

max. c. m. $\boxed{2}$ $r\,\boxed{4}$ A $r\,\boxed{6}$ Bq poteſtates ipſæ, *viz.* A & Bq cum indicibus

$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ quoti

Ex quoto 2, alterne multiplicato per indicem 6, fit 12, idem 12 fit ex quoto 3, alterne multip. per indicem 4.

r 12 Ac, juxta indicis 12 exigentiam, eſt r cccc Ac, & r 12 Bqq eſt r cccc Bqq.

A aſcendit ad Ac, propter alternum quotum 3, indicem cubi; & Bq aſcendit ad Bqq, propter alternum quotum 2, indicem quadrati.

Tum demum fiat multiplicatio vel diviſio: ex r cccc Ac in r cccc Bqq, fit r cccc Ac Bqq.

Ad multiplicandum integrum ſive rationalem A+B per r D, attolle A+B ad quadratum ſignum radicale præponendo, ità,

r.u. Aq+2AB+Bq in r D, fit *r.u.* DAq+2ABD+BqD.

Radices compoſitæ obſervant regulas ſimplicium.

CAP. XVI. *De Æquatione.*

1. ÆQuatio eſt æqualitas quantitatum, quando eadem quantitas duobus modis exprimitur, ut, Z=A+E. Zq=Aq+2Æ+Eq.

Quotieſcunque igitur problema aliquod ſive quæſtio proponitur, ex. gr. Data differentia duorum laterum & ſumma eorundem invenire latera; ad hujus problematis reſolutionem, id eſt, ut poſſis latera invenire, oportet quæſitum latus, ac ſi notum eſſet litera aliqua vocali, puta A, deſignare; conſonantes autem diſtinctionis cauſa datam ſummam & datam differentiam ſignificabunt: ut, pro ſumma ſcribe Z, pro differentia X, tanquam problema ita propoſitum fuiſſet, eſto X=40 & Z=1000.

Datis Z & X duorum laterum, invenire $\overset{A}{E}$: hactenus operando, ac ſi dixiſſes, Ego neſcio quid ſit illud latus majus, ſed quicquid ſit, præſumam de illo, ac ſi ſcirem; & eſto A, terminis ita notatis, reſtant in multis æquationibus quatuor agenda.

1. Æquationis conſtitutio; 2. Æquationis reductio; 3. Ejuſdem reſolutio; 4. Et quandoque extractio radicis.

1. Quod ad æquationis conſtitutionem attinet, vult Author in Sect. 2. ut magnitudines tam datæ quam quæſitæ, ſecundum conditionem quæſtioni convenientem efformentur; nempe, oportet terminos quæſtionis profunda meditatione contemplari, atque animo ſuſq; deq; revolvere, ut tandem valeas æqualitatem aliquam formare; neque enim hæc ars promittit extemporaneam quorumvis

tumvis ænigmatum ſolutionem; nempe, in propoſito problemate tecum aptam ratiocinationem hoc pacto adhibebis: Certe ſi ex ſumma laterum $= Z$ tollatur latus majus $= A$, neceſſario reſiduum erit latus minus, $Z - A = E$; ideoque neglecto jam E pro latere minore, ejus loco in poſterum ſubſtituam $Z - A$; & quoniam differentia quæ mihi in quæſtione datur $= X$, obtinetur etiam, ſubducendo latus minus è majore; minore latere $Z - A$ ſubducto a majore A, mutando ſigna minoris, reſt. $A + A - Z$, hoc eſt, $2A - Z = X$; atque ita æquatio quædam conſtituta eſt: Verum hactenus prima tantum operatio peracta eſt, circa quam quidem maxima plerumque premit difficultas; enimvero in quibuſdam problematibus reſolvendis, quamvis in hac arte fueris verſatiſſimus, erit tandem quandoque altum dies noctesque meditandum, more *Vietano*, capite inclinato & manibus ſuffulto: Multa peritia opus erit in Geometria & geometricis tractandis; nimirum, ut non modo rationes & proportiones notas habeas, ſed adeo familiares ut in uſum proferre promptus ſis; in quibuſdam quidem quæſtionibus ipſi problematum termini, regia via, ducunt analyſtam, ad æquationem facile parabilem, *ſcil.* operando ſecundum conditionem quæſtioni convenientem, mox æquationem efformabit, in aliis autem non ita; verbo dicam, quo quiſque fuerit theorematum tum *Euclideanorum* tum ſpecioſorum ſupellectile ornatior atque inſtructior eo ſagacior ſphynx in problematibus reſolvendis futurus: Ut Lector intelligat quæ ſequuntur, noverit ſaltem, quod datis (rectangulis triangulis planis) quadratis Catheti & Baſis, datur etiam quadratum hypotenuſæ per 47. 1. Et ſi dentur

duo anguli, datur etiam & tertius per 32. 1. Et data ratione laterum, datur & ratio quadratorum per 20. 6. &c. & penum Authoris in c. 11, & 18.

Quando plura sunt quæsita, id est, in hac arte inprimis observandum quomodo nominentur, ut hic vides me ratiocinando invenisse modum exprimendi latus minus non per aliam vocalem E, sed per Z—A; pariter si fieri possit tentandum est ut secundum quæsitum, &c. exprimas per primum & alias magnitudines datas quæ per consonantes significantur, quod, quando fieri non potest, tot sint constituendæ æquationes quot fuerint quæsitæ magnitudines, solet *Cartesius* nominare magnitudines datas per primas literas alphabeti, a, b, c, &c. & quæsitas per ultimas y, z, x; sed id unicuique liberum erit; nos Authorem nostrum sequimur.

2. Habuimus jam æquationem inventam sive constitutam, *scil.* $2A - Z = X$: sequitur secunda operatio, quæ consistit in reductione æquationis, quia nempe in omni æquatione ubi primum ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur, uti in hac æquatione $2A - Z = X$; quæsita magnitudo A stat non sola sed una cum 2 in A, & $-Z$; ideoque in hoc & similibus casibus termini æquationis sunt comparandi addendo, subtrahendo, multiplicando & dividendo; atque ita ordinandi, ut A sola ex una parte æquationis habeatur, nempe addendo Z ad utramque partem, fit $2A = X + Z$; & dividendo utramque partem per 2, fit $A = \frac{X+Z}{2}$ eritque $A = 70$; tum, invento latere majore, mox invenitur latus minus $Z - A = 100 - 70 = 30$; itaque in omnibus æquationibus laborandum, ut A sola

vel aliqua ejus potestas ad quam ascendit, ut Aq, Ac, sola stet ex una parte æquationis.

Reductionis causa, 5 regulas hic tradit *Oughtredus*, per quas termini æquationis mutari possint, æqualitate inter terminos æquationis manente.

1. Prima operatio vocatur à *Vieta* isomeria, & fit ope multiplicationis, nam æqualia si æqualiter multiplicentur, manebunt æqualia producta, ut,

$$A - C = \frac{Aq + Bq}{D} + B + C.$$

Hic Aq, gradus magnitudinis quæsitæ, est in fractione, ergo, ut liberetur, ducatur utraque pars æquationis in D, denominatorem fractionis, fiet $AD - CD = Aq + Bq + BD + CD$: quia ipsa fractio multiplicatur per D, solum delendo D, ut Capite 10. docuimus, & si placet per 1. 9. hujus revocentur omnia ad $\frac{AD - DC}{D} = \frac{Aq + Bq + DB + DC.}{D}$ quoniam ergo denominator D est utrobique idem, potest negligi, vel multiplicando fractiones per D, abjiciatur D, ut diximus.

2. Secunda operatio vocatur à *Vieta* antithesis, & fundatur in hoc principio, si æqualibus addas vel subtrahas æqualia erunt æqualia; si ergo $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$: addatur DC utrique parti, & erit $DA - DC + DC = Aq + Bq + DB + 2DC$, vel in hujus prima parte expuncta $- DC$ propter $+ DC$: erit $DA = Aq + Bq + BD + 2DC$, nimirum idem evenit ac si mox transposuisses $- DC$ in alteram partem sub signo contrario, *sc.* $+ DC$: tum ex utraque parte tolle Aq; erit $DA - Aq = Bq + BD + 2DC$.

 3. Parabolismus

3. Parabolismus est quando species altissima quæsita, ut Aq in BAq ducitur in magnitudinem aliquam datam, ut in B datam, quo casu si dividas æqualia per æqualia quotientes æquales erunt, ut, quoniam BAq+BqA= ZC, divide utrobique per B, & erit $Aq+BA=\frac{ZC}{B}$

4. Hypobibasmus est etiam divisionis operatio; quando contingit omnes magnitudines datas duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ, fiat omnium per adplicationem ad minimam speciem secundum ordinem tabellæ communis depressio; ut Aqq+BAc= Zq Aq, expuncto in singulis Aq, quia expungere est dividere, ut ante docuimus, oritur Aq+BA=Zq.

5. Ultima operatio, si magnitudo aliqua sit latus surdum, æquatio in ipsis potestatibus est instituenda, vocatur à *Vieta* ascensus climacticus, & fit ope multiplicationis; si *r* q BA=C—B, ideoque ipsorum quadrata BA=Cq—2CB+Bq; quia *r* q BA quadratur solum abjiciendo signum radicale, & fit BA: tum dividendo utramq; partem per B, erit $A=\frac{Cq-2CB+Bq}{B.}$ item *r. u.* BA+CA=D+B; ergo quadrando utramque partem, fit BA+CA=Bq+2BD+Dq: per *r. u.* BA+CA intelligit non radicem BA, sed radicem universalem BA+CA. Denique *r* q $\frac{A}{3}$ = *r* c 2A, consule 11. 15. hujus; quia index quadrati 2, & index cubi 3, quia, inquam, 2 & 3 sunt in minimis terminis, hic quotis alternis non opus erit, sed immediate reducuntur ad idem genus, ducendo 2 in 3, unde fit 6, index c c; tum alterne cubando $\frac{A}{3}$, fit $\frac{Ac}{27}$, & quadrando 2A, fit 4Aq,

ita

ita erit $r\,cc\,\frac{Ac}{27} = r\,cc\ 4Aq$; tum cubo-cubando utramque partem, quod fit abjiciendo signum radicale $r\,cc$, erit $\frac{Ac}{27} = 4Aq$, duc utramque partem in 27, erit $Ac = 108Aq$; divide utramque partem per Aq erit $A = 108$.

Huc pertinet climacticus descensus, quando æquatio in potestatum radicibus instituitur, ut si $BA = Cq - 2CB + Bq$; ergo erit $r\ BA = C - B$.

Æquationes non sunt omnes unius generis; quandoque per has 5 operationes æquationes ita ordinari possint ut solum A (vel aliqua ejus potestas ad quam ascendit, ut Aq Ac Aqq, &c.) stet ex una parte, & solummodo consonantes sive quantitates datæ ex altera; si æquatio ita staret $A = B + C - D$, facile noveris valorem A, quia habes ex altera parte magnitudines datas illi æquales: si ita $Aq = Bc + cD$, facile etiam A habebitur, *sc.* extrahendo radicem quadratam ex notis quantitatibus $BC + CD$, per c. 14. hujus; atque hujusmodi æquationes vocantur puræ, quarum exempla sint hæc quæ sequuntur.

Ex. 2. Data differentia duorum laterum $X = 12$, & ratione eorundem ($R.S = 3.\ 2.$) sesqui altera invenire latera. Puta præstitum esse quod postulatur, & esto majus latus A, jam adhibeo aptam ratiocinationem, & mecum attentius considero, quomodo per has species latus minus designari possit. Certe quum latus majus sit A, quodcunque illud fuerit, si differentia quæ hic mihi datur $X = 12$ tollatur ex A majore latere, necessario relinquetur minus latus; ergo minus latus erit $A - X$: & quoniam in problemate proposito ratio horum

rum laterum datur, *sc.* ut R ad S; erit ergo R. S : : A. A—X : hic effulget æquatio; nam quia factus ab extremis æquatur facto à mediis, ergo SA=RA—RX.

Reducetur hæc æquatio & per antithesin SA+RX=RA : & iterum per antithesin RX=RA—SA : & per parabolismum, dividendo utramque partem per R—S $\frac{RX}{R-S}$=A, sed $\frac{RX}{R-S}$ =36, ergo A latus majus =36 : ergo latus minus A—X=24 : & 36. 24 : : 3. 2.

Mecum ratiocinando reperio opus absolvi posse exprimendo etiam minus latus per $\frac{SA}{R}$, nam quoniam habeo inter latera rationem datam, erg. ut R. S : : A $\frac{SA}{R}$ = minori lateri, per 11. cap. hujus. Ergo $\frac{SA}{R}$=A—X erg. per isomeriam multiplicando utramque partem erit SA=RA—RX, & per antithesin RX=RA—SA, & per parabolismum $\frac{RX}{R-S}$ =A. quoniam per 11. hujus E=A—X, atque etiam E=$\frac{SA}{R}$ ergo $\frac{SA}{R}$=A—X.

Ex. 3. Dato rectangulo sub lateribus B=20, & ratione laterum R S, invenire latera R=5 & S=1; puta præstitum esse quod postulatur, &, esto majus latus A, quoniam datur ratio laterum; secundum conditionem quæstioni convenientem ita ratiocinor, (terminos tam quæsitos quam datos comparando,) ut R. S : : A. $\frac{SA}{R}$= minori

minori lateri; ergo ex A majori in $\frac{SA}{R}$ minus fit rectangulum $\frac{SAq}{R}$, sed rectangulum B datur in problemate, ergo duobus modis exprimitur, & habeo æquationem inventam $B=\frac{SAq}{R}$; ergo per Isomer. $BR=SAq$, & per parabolismum $\frac{BR}{S}=Aq=100$; ergo extrahendo radicem, $10=A$ majori, $\frac{SA}{R}=2$ minori.

Ex. 4. Invenire tres numeros continue proportionales in ratione data $R.S.=4.1.$ ita ut ex inventorum numerorum continua multiplicatione gignatur datus numerus $B=1728$. Primus esto A, quoniam (ut vult quæstio) secundus est in ratione quadrupla ad primum, erit ergo secundus 4A, & tertius est in ratione quadrupla ad secundum, ergo tertius erit 16A: ergo tria latera sunt A, 4A, 16A. Secundum conditionem problematis ducantur in se continue. Ex A in 4A fit 4Aq; ex 4Aq in 16A fit 64 Ac; ideo per quæstionem 64Ac $=B$; ergo per parabol. $Ac=\frac{B}{64}=27$; & extrahendo radicem cubicam $A=3$: & numeri sunt 48, 12, 3, & $48 \times 12 \times 3=1728$.

In hoc exemplo vides quomodo tres numeri quæsiti nominantur per unam speciem A; non per alias duas vocales E & I.

Ex. 5.

Ex. 5.

Acer in Æmonia fugientem valle Lycisca,
Insequitur leporem picta per arva vagum;
Hic decies quinis præcedit saltibus, ille
Instat, & exultans, per juga læta ruit.
Dumque quater saliendo lepus consurgit in altum,
Hic toties ternis saltibus evehitur;
At tantum geminis percurrit saltibus agri
Interea quantum conficit ille tribus.

Dic mihi jam quoties saltus iterante Lycisca
Contigit infesto præda petita cani.

Hoc problema in numeris (pro regula falsi, quæ cum Algebra magnam habet affinitatem) mihi propositum est in exemplum ab amico meo, *Georg. Attawello*, Erudito Mathematico, qui me primus docuit in Arithmetica vulgari, ejus resolutionem in speciebus algebraicè ita accipe.

Leporis ante lyciscam passus $50 = B$.
Lepus quater salit dum canis ter $R.\ S = 4.\ 3$.
At canis duo saltus dant tres leporis $M.N = 2.\ 3$.
Esto $A =$ numero passuum canis; ergo ratiocinando invenio quod $S.R :: A.\ \frac{RA}{S} =$ numero passuum leporis, & addendo B. ad $\frac{RA}{S}$ erit $M.\ N :: A.\ \frac{RA+SB}{S} =$ summ. totalis passu. lepor.

Ergo per theorema catholicum $NA = \frac{MRA+MSB.}{S.}$

per isomeriam erit $SNA = MRA + MSB$.
per antithes. $SNA - MRA = MSB$.
per parabolis. $A = \frac{MSB}{SN - MR} = 300.$ & $\frac{RA}{S} = 400.$

Ter

Ter centum passus currit canis ille Lycisca,
Et quadringentos præda petita facit;
Sic quatuor ternis saltus quadrare videntur,
Et duo dant timidi tres numero leporis.

Hæc de puris æquationibus hactenus, verum enimvero quandoque torque æquationes, ut libuerit, nunquam illas ita reduces ut habueris magnitudinem quæsitam solummodo ex una parte, sed vel ipsa magnitudo vel aliquis parodicus ad altissimam magnitudinis potestatem gradus miscebitur cum magnitudine data, & æquatio stabit in hunc modum, vel similiter.

$$Aq + AB = DC$$
$$Aq - AB = CF$$
$$Ac + BAq = BCD$$
$$Aqq + CqAq = BqCq.$$

Hic vides magnitudinem quæsitam A, vel gradum ejus scansorium Aq, mistum cum magnitudine data, id est, Aq ductum in B, neque ope prædictarum regularum potest fieri liberatio; hujusmodi æquationes appellantur adfectæ, quæ duûm generum; vel enim æquationes adfectæ æqualiter ascendunt in ordine scalæ, vel inæqualiter.

Quid est autem æqualiter ascendere?

Meministi proculdubio quod potestates omnes A, Aq, Ac, &c. indices suos habent correspondentes 1, 2, 3: jam æqualitas hæc vel inæqualitas ab indicibus æstimanda: si nempe indices ascendant æqualibus excessibus, id est, in ratione arithmetica, quæ & in hoc negotio est semper indicis maximi ad medii dupla, ut in exemplis; ita,

1 2 0	2 1 0
Z A — Aq = Æ	Aq — XA = Æ
2 4 0	4 2 0
Zↄ Aq — Aqq = Æq	Aqq — Xↄ Aq = Æq
3 6 0	6 3 0
ⁿZ Ac — Acc = Æc	Acc — ⁿX Ac = Æc
&c.	&c.
Z E — Eq = Æ	Eq + X E = Æ
Zↄ Eq — Eqq = Æq	Eqq + Xↄ Eq = Æq
ⁿZ Ec — Ecc = Æc	Ecc + ⁿX Ec = Æc
&c.	&c.

In hac æquatione Ecc + ⁿXEc = Æc sunt tres species, prima Æc rectangulum, ex Ac in Ec; media est ⁿXEc, ex differentia cuborum ducta in cubum minoris; altissima species Ecc est cubo-cubus minoris.

Et hæ tres species ascendunt æqualiter, quia index rectanguli Æc est o; quia rectangulum in scala neque est radix, neque quadratum, neque cubus, &c. ideoque pro absoluto numero habetur ab unitatibus quas continet æstimando, meritoque habet pro indice o circulum, qui unitatum loco appropriatur; qui rectangulum in numeris describere solent, ut Aq — 2A = 8N, literam N numerum absolutum significantem apponunt: tum index mediæ speciei ⁿXEc (in qua data magnitudo (quæ per consonantem ⁿX exprimitur, & co-efficiens appellatur) ducitur in cubum magnitudinis quæsitæ) est ratione cubi 3, qui numerus 3 excedit cyphram o per 3: tum ultimo, index altissimæ speciei Ecc est 6, qui excedit 3 per 3; ita ascendunt indices harum trium specierum æqualibus excessibus o, 3, 6.

Hic

Hic autem ſciendum quod (inter operandum) nunquam habueris æquationem reſolvendam, deſcriptam exácté in ulla harum formarum, ex. gr. Eq+XE=AE; nullo pacto enim rectangulum vocalibus exprimitur, quia dari ſupponitur; ſed ita, Eq+XE=B, vel Eq+XE=Bq, vel Eq+XE=Bc: intelligendo Bc=24 ac ſi eſſet rectangulum AE, ex ductu 4=E in A=6: quinetiam inter operandum ſæpe ſupprimitur, & quaſi ſilet X, æquatione ita deſcripta, Eq+DE=BC; ſubintelligendo quod D in hac æquatione eſt differentia laterum, nempe X=2.

Imo quanquam pro latere majore ſcribere ſolemus A, pro minore E, ſæpiſſime tamen fit (quod diligenter obſervabis) ut per ipſam ſpeciem A ſubintelligere debeas minorem E; ita poſſis, ſi velis, pro Ecc+¯ˆXEc=Æc ſcribere Acc+¯ˆXAc=Bcc, intelligendo per Bcc forte 13824, rectangulum, ex Ac in Ec, cujus lateris minoris, *ſc.* Ac, radix cubica erit A=4; majoris, rad. cub. erit 6; ideoque & per Acc ſubintelligendus cubo-cubus minoris radicis, ut poſtea intelliges planius, quia in operando priuſquam noveris an magnitudo quæſita fuerit major vel minor, poſſis ſcribere ex voluntate tua pro magnitudine quæſita A, dicens, Puta præſtitum eſſe quod poſtulatur, & eſto A, tum eventus operis docebit an A fuerit majus vel minus latus rectanguli, ut mox (inquam) planius intelliges.

Eſt autem æquatio hæc adfecta ita exprimenda, eſt nempe cubo-cubus Ecc adfectus adjunctione ſolido-ſolidi ¯ˆXEc ſub cubo lateris Ec, & co-efficiente ſolido ¯ˆX.

In

In ſeriebus æquationum ſupra deſcriptis, ſecundæ & tertiæ hanc habent geneſin, quia per 11. cap. facile patet quod Zↄ — Aq = Eq ducatur utraque pars in Aq, erit ZↄAq — Aqq = Æq, ˆZ — Ac = Ec ducatur utraque pars in Ac erit ˆˆZAc — Acc = Æc, & quemadmodum ibidem patet quod $\frac{Z+X}{2}=A$, ita etiam $\frac{\text{Zↄ}+\text{Xↄ}}{2}=\text{Aq}$ & $\frac{\text{ˆˆZ}+\text{ˆX}}{2}=\text{Ac}$.

Quotieſcunque igitur proponitur æquatio conſtans ex tribus ſpeciebus æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentibus, cogitabis magnitudinem abſolutam datam eſſe rectangulum ſub duabus magnitudinibus quæſitis, ſive latera ſint ut AE, ſive quadrata ut Æq, ſive cubi ut Æc = AcEc, &c. qualis, *ſcilicet*, eſt poteſtas mediæ ſpeciei; quod ſi altiſſima ſpecies Aq ſit negata in hac æquatione ZA — Aq = AE, eſt Aq negata, id eſt, — Aq, tum co-efficiens Z in media ſpecie ZA erit ſumma magnitudinum quæſitarum, & de utraque exponetur; id eſt, de utraque magnitudine rectangulum AE componente nempe tum A majore latere tum E minore; urgebis adhuc, quid eſt exponi? Reſpondeo, Exponetur, id eſt, explicabitur, juxta regulas ſequentes; & quod ad ſummam attinet, juxta primam eruetur, tum A major radix, tum E minor; ideoque quando altiſſima ſpecies eſt negata, ut ZA — Aq = AE, ſive in operando BA — Aq = Cq, æquatio hujuſmodi duas habebit radices, nempe,

$\frac{Z}{2} + r.u.\ \frac{Zq}{4} - \text{Æ} = \text{A}$ majori.

& $\frac{Z}{2} - r.u.\ \frac{Zq}{4} - \text{Æ} = \text{A}$ minori.

Et utraque radix æquationi BA — Aq = Cq ſatisfaciet; ita ut ſi exponatur de majori erit BA — Aq = Cq; etiam

etiam ſi de minori erit BA—Aq=Cq ; obiter, quando ad regulas ventum erit, obſervato lineolam, *ſcil.* — ſub +, ita, $\frac{1}{2}Z \pm$ *r. u.* &c.

At ſi altiſſima ſpecies ſit adfirmata, co-efficiens erit magnitudinum quæſitarum differentia, ipſa autem ſpecies exponetur de majori, ſi media ſpecies negetur, id eſt, ſi ſit Aq—BA=Cq: hic —BA eſt negativ. & in hoc caſu regula ſecunda dabit utrumque latus rectanguli; ſed profecto ſolummodo majus æquationi ſatisfaciet *r. u.* $\frac{Xq}{4}$+Æ : $+\frac{X}{2}$ =A majori; vel in æquatione propoſita B=X; erg. *r. u.* $\frac{Bq}{4}$+Cq : $+\frac{B}{2}$ = A majori.

Sin autem media ſpecies etiam adfirmetur, ſpecies exponetur de minore, ut, Aq+BA=Cq; hic +BA eſt adfirmat. ergo ſolummodo minus latus in hoc caſu æquationi ſatisfaciet & per negativam partem regulæ ſecundæ, *r. u.* $\frac{Xq}{4}$+Æ : $-\frac{X}{2}$=A minori.

Supponitur in æquatione reducta dari una cum rectangulo vel ſumma vel differentia, ut, BA—Aq=Cq datur rectangulum = Cq, quanquam magnitudines ex quibus componitur quæruntur; datur etiam & ſumma = B, quia — Aq altiſſima ſpecies eſt negata.

Tum datis binarum quæſitarum magnitudinum ſumma & rectangulo, datur differentia earundem; vel data differentia & rectangulo, datur ſumma: nam per 2. Cap. 11.

$$\left.\begin{array}{l} Q\tfrac{1}{2}Z - Æ = Q\tfrac{1}{2}X \\ Q\tfrac{1}{2}X + Æ = Q\tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{quare} \left\{\begin{array}{l} r.u.\tfrac{1}{4}Zq - Æ = \tfrac{1}{2}X \\ r.u.\tfrac{1}{4}Xq + Æ = \tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{per 8 hujus capitis.}$$

 Roga-

Rogabis, quomodo fit $Q\frac{1}{2}Z : -\text{Æ} = Q\frac{1}{2}X$.

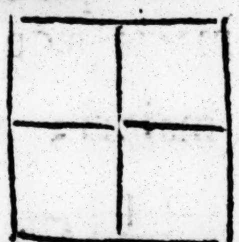
Resp. per 2. 11. hujus, $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = \text{Æ}$.

ergo per 4. 2. el. $Qu.\frac{1}{2}Z : -Qu.\frac{1}{2}X = \text{Æ}$.

ergo per antithesin, $Qu.\frac{1}{2}Z : -\text{Æ} = Q\frac{1}{2}X$.

erg. p climact. desc. $r.u.\ \frac{1}{4}Zq - \text{Æ} = \frac{1}{2}X$.

Quod quadrans quadrati alicujus lineæ æquatur quadrato semissis ejusdem lineæ per 4. 2. El. apparet ex hoc schemate



bisecetur AD in B.

A B D $\frac{1}{4}Q{:}AD = Qu{:}\frac{1}{2}AD = Qu{:}BD$.

Denique datis binarum magnitudinum, $\frac{1}{2}Z$ & $\frac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines hisce duabus regulis,

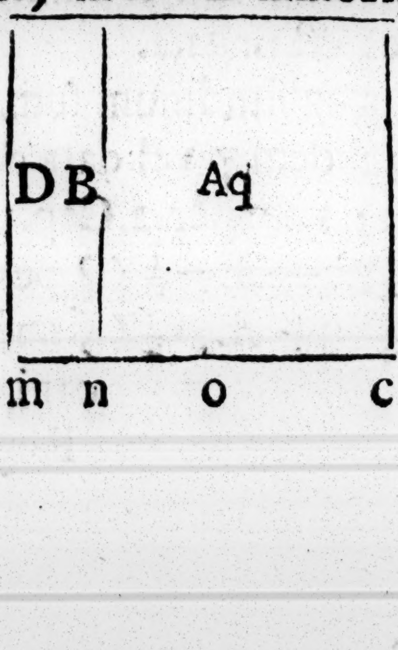
1\. Reg. $\frac{1}{2}Z \pm r.u.\frac{1}{4}Zq - \text{Æ} : (\frac{1}{2}X) = \begin{matrix}A\\E\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{quia per } 2.11.\\ \frac{Z}{2} \pm \frac{X}{2} = \frac{A}{E}\end{matrix}\right.$

2\. Reg. $r.u.\ \frac{1}{4}Xq + \text{Æ} : (\frac{1}{2}Z) \pm \frac{1}{2}X = \frac{A}{E}$

Harum regularum demonstratio geometrica diversimode construi potest: ipse author modum unum exposuit cap. ult. probl. 24, 25. sic etiam breviter omnes casus ab *Euclid.* 5. 2. el. demonstrantur.

Sunto magnitudines sive radices quæsitæ $nc = A$ majori, $mn = E$ minori, $z = mc$. $\frac{1}{2}z = oC = mo$.

A



m n o c

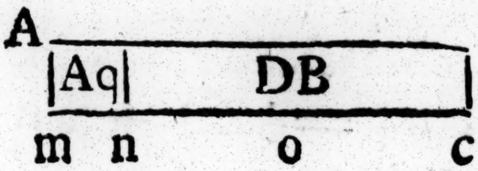
propter constitutionem æquationis fiat $DB + Aq = CA =$ toti rectangulo per 3. 2 el. erg. per antith. $DB = CA - Aq$.

quæratur major.

Propter

Propter reſolutionem æquationis, exponatur per 4. 2. el. quod Qu. $\frac{1}{2}$ Z $=$ m o eſt $=$ $\frac{1}{4}$ Zq; & quod rectangulum m n c ſub inæqualibus ſegmentis ſit per conſtructionem $=$ DB.

Qu. m o $=$ m n c $+$ Q. n o. per 5. 2.
erg. $\frac{1}{4}$ Zq $=$ DB $+$ Q. n o. per expoſitionem.
erg. $\frac{1}{4}$ Zq $-$ DB $=$ Qu. n o. per antitheſin.
erg. *r. u.* $\frac{1}{4}$ Zq $-$ DB $=$ n o. per climactic. deſcenſum.
erg. $\frac{1}{2}$Z $=$ oc $+$ *r. u.* $\frac{1}{4}$Zq $-$ DB ($=$ n o $=$ $\frac{1}{2}$X) eſt $=$ n c maj.
nempe o c $+$ n o $=$ n c majori.



quæratur minor A $=$ m n; & conſtituatur per 3. 2. el. & antitheſin CA $-$ Aq $=$ DB.

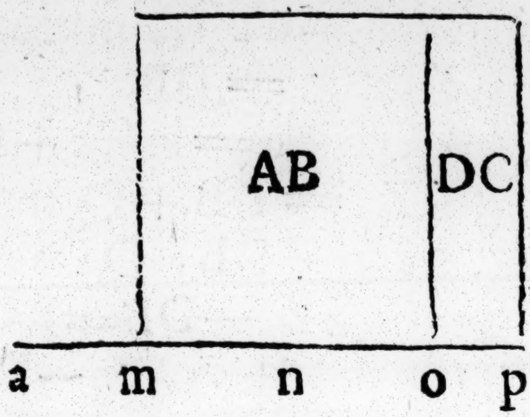
Erg. per 5. 2. el. per expoſitionem, antitheſin & climacticum deſcenſum, ut prius, erit $\frac{1}{2}$ Z $=$ m o $-$ *r. u.* $\frac{1}{4}$ Zq $-$ DB ($=$ n o $=$ $\frac{1}{2}$ X) eſt $=$ m n minori; hoc eſt, m o $-$ no $=$ m n minori.

Eſto hic caſus primus in quo dualis radix exigitur, ſequitur ſecundus.

Quando altiſſima ſpecies eſt adfirmata & media negata, ſunto quæſitæ magnitudines A $=$ m p majori, E $=$ o p $=$ a m minori, differentia erit m o $=$ X $=$ B.

Quadretur m p = Aq, & conſtituatur æquatio per 2. 2.

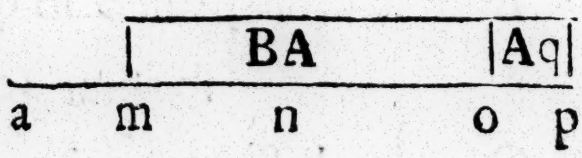
Æ + Ax = Aq
ſive BA + DC = Aq
erg. DC = Aq — BA. Per antitheſin æquatio ita reſolvitur.



Quoniam m p o + Qu. n o = Qu. n p. per 6. 2.
erg. Dc + $\frac{1}{4}$ Xq = Qu. n p. per expoſitionem.
erg. *r. u.* $\frac{1}{4}$ Xq + Dc = n p. per climact. deſc.
erg. *r. u.* $\frac{1}{4}$ Bq + Dc (hoc eſt, n p = $\frac{1}{2}$ Z) + m n (hoc eſt, $\frac{1}{2}$ X) eſt = A majori; nempe, n p + m n = m p hic major ſola æquationi ſatisfacit: nam intelligendo o p minorem eſſe = A; non erit Dc = Aq — BA.

Si utraque ſpecies ſit adfirmata ut Aq + XA = Æ ſive Aq + BA = Dc = toti rectangulo, quæratur minor.

Eſto m p = majori, & A = o p minori, cui æquetur a m, erit differentia m o = B = X & Qu. n o = $\frac{1}{4}$ Xq, & m p o = Dc.



Erg. p. 6. 2. el. *r. u.* $\frac{1}{4}$ Xq + m p o (hoc eſt, n p = $\frac{1}{2}$ Z) — $\frac{1}{2}$ X (hoc eſt, n o) eſt = o p, ſive A minori; nempe, n p — n o = o p minori, quæ (in hoc caſu qui ſit tertius) ſola æquationi ſatisfacit: nam intelligendo m p eſſe = A, non erit Aq + BA = Dc.

Atque

Atque ita omnes caſus ex quinto tum etiam ſexto ſecundi Elementorum demonſtrantur, neque metuas quin & in altioribus æquationibus eadem tenebit demonſtratio; nam in ſeriebus altiſſima ſpecies eſt ubique quadrata mediæ, (ut ex Ac in Ac fit Acc) ideoque & illius index hujus erit duplus; neque aliter fieri poteſt, quin ab indice (o) progreſſio omnis arithmetica neceſſario debeat eſſe dupla.

Vides jam ex antedictis quod præter conſtitutionem & reductionem æquationis, etiam reſolutionem per regulas expoſitas & extractionem radicis quandoque fieri debere; ſed Exemplis omnia erunt clariora.

Exemp. 1. Invenire duos numeros quorum ſumma B = 25 datur, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur alius quivis datus numerus CD = 84.

Puta præſtitum eſſe, &c. & unus eſto A; ergo quoniam ſumma datur alter erit B—A; ex ductu unius A in alterum B—A factus erit BA—Aq; & juxta tenorem quæſtionis

$$\overset{1}{BA}-\overset{2}{Aq}=\overset{0}{CD}$$

erit BA—Aq = CD: æquatio hæc non patitur ulteriorem reductionem; & quoniam altiſſima ſpecies Aq eſt negata, B co-efficiens in media ſpecie erit Z, ſumma magnitudinum quæſitarum, ex quibus fit CD rectangulum = 84, juxta formam illam in ſeriebus ZA—Aq = Æ.

Erg. in hoc caſu dualis radix exigitur juxta regulam primam:

$$\text{nempe}\begin{cases}\frac{B}{2}+r.\,u.\,\frac{Bq}{4}-CD. = A \text{ majori} = 21.\\ \frac{B}{2}-r.\,u.\,\frac{Bq}{4}-CD. = A \text{ minori} = 4.\end{cases}$$

Tolle $\frac{336}{4}$ è $\frac{625}{4}$ rest. $\frac{289}{4}$, hujus radix quadr. est $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$. Ad $8\frac{1}{2}$ adde $12\frac{1}{2} = \frac{1}{2}B$, major erit 21; tum ex $12\frac{1}{2}$ tolle $8\frac{1}{2}$ rest 4 $\frac{Bq}{4} = \frac{625}{4}$ & CD $= 84 = \frac{336}{4}$.

Jam redibis ad æquationem BA—Aq$=$DC; & vide quomodo utraque radix (tum 21, tum 4) æquationi satisfacit.

$$BA - Aq = DC$$

hoc est, 25×21—quadr. ex $21 = 84$.

Sic etiam,

$$BA - Aq = DC$$

$$25 \times 4 \text{—quadr. ex } 4 = 84.$$

Exemp. 2. Numerum invenire, qui cum dato numero $B = 156$ suum quadratum, *sc.* Aq efficiet.

Puta factum esse, &c. & esto A; erg.

$$A + B = Aq; \text{ \& per antithesin } \overset{2}{Aq} - \overset{1}{A} = \overset{0}{B}.$$

Hic altissima species $+$ Aq est adfirmata; erg. coefficiens erit differentia & æquationis resolutio facienda per regulam secundam; & quoniam media species —A est negata, pertinet per casum secundum ad affirmativam partem istius regulæ:

nempe, *r. u.* $\frac{1}{4}Xq + B. + \frac{1}{2}X = A$ majori.

Dices, Ego hic nullum video numerum co-efficientem in media specie, sed A per se sola stat. Respondeo, Si desit co-efficiens, unitas erit co-efficiens ejusmodi æquationum.

$1 = X$ nam $A = 1A$: erg. $\frac{1}{4}Xq = \frac{1}{4}$ & $\frac{1}{2}X = \frac{1}{2}$. $(156 + \frac{1}{4}) = \frac{625}{4}$ cujus radix $\frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$ cui adde $\frac{1}{2}$ fit $13 = A$. $13 + 156 = 169 =$ quadrato è 13.

Ex

Ex $12\frac{1}{2}$ tolle $\frac{1}{2}$ restat 12, minus latus rectanguli; nam ex 12 in 13 fit 156 rectangulum: sed 12 non satisfacit æquationi **Aq — A = B**; nam 144—12 non est = 156.

Exemp. 3. **Invenire numerum A, cujus Aqq cum dato numero B = 8 efficiet numerum ad Aq in data ratione R. S. = 6. 1.**

R. S :: Aqq + B. Aq.

erg. $S\,Aqq + S\,B = R\,Aq$ per theor. cathol.

erg. $S\,B = R\,Aq - S\,Aqq$ per antithesin.

erg. $B = \frac{R\,Aq}{S} - Aqq$. dividendo per S.

Hic co-efficiens, nempe $\frac{R}{S}$, erit summa quadratorum, quia altissima species — A q q negatur:

erg. $\frac{1}{2}\frac{R}{S} = 3. + r.u.\ \frac{1}{4}\frac{Rq}{Sq} - B = 1.$ id est, 3 + 1 = A q & A = 2. maj. & 3 — 1 = 2 = A q & A = r 2. minori $\begin{cases} 6.\ 1 :: (16+8)\ 4 \\ 6.\ 1 :: (4+8)\ 2 \end{cases}$ r 2 quadretur, & fit 2, cujus quadratus est 4 = A q q quadrato-quadratus radicis è 2; ex 4 addito ad rectangulum datum juxta conditionem problematis summa est 12 ad 2, ut 6 ad 1.

In hoc exemplo vides quod, præter resolutionem æquationis, & radix extrahenda, ut inveniatur A..

Illa magnitudo data appellatur co-efficiens, in quam ducitur magnitudo quæsita vel aliquis ejus gradus: in hoc exemp. gradus magnitudinis, nempe Aq, ducitur in $\frac{R}{S}$

Ideoque, si æquatio aliqua, staret in hunc modum; $\frac{SB}{D}$

$$\frac{SB}{D} = \frac{mAq}{n} + \frac{GAq}{C} + \frac{RAq}{S} - Aqq.$$

$\frac{SB}{D}$ esset rectangulum datum, co-efficiens esset compositus ex $\frac{m}{n} + \frac{G}{C} + \frac{R}{S}$ nam ex his in solam Aq fiunt tres species, quæ pro una nempe media reputantur in hac æquatione, quæ respondet ad AqEq=Z⊃Aq—Aqq.

Exemp. 4. Invenire numerum A, ad quem Aq multatus numero dato quocunque, puta B=264, rationem datam habeat R. S=10. 1. juxta conditionem quæstionis.

onis.	Aq—B.A :: R.S.	
ergo	RA=SAq—SB	per cath. theor.
ergo	SAq—RA=SB	per antith.
	2 1 0	
ergo	$Aq - \frac{RA}{S} = B$	per parabol.

Co-efficiens $\frac{R}{S}$ est differentia, & quæritur major per primam partem posterioris regulæ:

$$r.u.\tfrac{1}{4}Xq + Æ. + \tfrac{1}{2}X = A.$$

hoc est, $r.u.\tfrac{1}{4}\frac{Rq}{Sq} + B. + \tfrac{1}{2}\frac{R}{S} = A.$

$\tfrac{1}{2}\frac{R}{S} = 5$, hoc est, $r.u.\,25 + 264 = r\,289 = (17:+5) = 22 = A.$

Quadretur 22, fit 484, è quo tolle 264, erit 220. 22 :: 10. 1.

$r.u.\tfrac{1}{4}\frac{Rq}{Sq}$, &c. respondet formæ *Oughtredi*, $r.u.\tfrac{1}{4}Xq$, &c.

Forma

Forma autem noſtra ſic legenda; radix univerſalis, quadrantis quadrati co-efficientis ſive quæſitarum magnitudinum differentiæ $= \frac{R}{S}$, plus rectangulo = B; radix (inquam) hæc univerſalis aucta ſemiſſe co-efficientis, æquatur magnitudinum majori.

Exemp. 5. Duos numeros in dato exceſſu B = 6 invenire, ita ut ex ductu unius in alterum gignatur numerus datus quicunque C = 475.

Puta, &c. Et eſto minor A, quoniam datur exceſſus = B; ergo major erit A + B, & juxta tenorem quæſtionis conſtituetur æquatio

$$Aq + BA = C.$$

Quoniam hic media ſpecies BA eſt affirmata, pertinet ad caſum tertium, & reſolutio fiet per poſteriorem partem regulæ ſecundæ, in qua co-efficientis ſemiſſis negatur de radice univerſ. *r.u.* $\frac{1}{4}$Bq+C.—$\frac{1}{2}$B=A minori.

Ex *r. u.* (9+475) = 22 tolle 3, erit A=19 min.
22+3=25 maj.

In hoc exemplo utraque radix requiritur ad ſatisfaciendum quæſtioni, ſed profecto major non ſatisfacit æquationi Aq + BA = C:

nam Qu. 25 + 25 in 6 non eſt = 475.
ſed Qr. 19 + 19 in 6 eſt = 475.

Exemp. 6. Uberioris explicationis cauſa dabimus, omnium caſuum alia eaque naturalia exempla, quæ & prodeſſe & delectare poſſint; tentabis autem (ſi placet), per teipſum; noſtris non examinatis.

Data

Data media ($B=12$) trium proportionalium linearum rectarum & differentia inter extremas $= 10$, invenire minorem extremam.

Minor esto A, major erit $A + X$, ducatur in A, & per cath. theor. erit $Aq + AX = Bq$
per posteriorem partem 2^dæ^ reg. $A=8$. 8. 12. 18. $\div\!\!\div$

Exemp. 7. Invenire majorem; esto A; minor erit $A - X$, erg. $Aq - XA = Bq$
per priorem partem reg. 2^dæ^ $A=18$. 18. 12. 8. $\div\!\!\div$

Exemp. 8. Data media trium proportionalium $B = 12$, & summa extremarum $= Z = 26$, invenire alterutram extremam.

Major esto A, minor erit $Z - A$, erg. $ZA - Aq = Bq$
per affirmativam partem prioris reg. $A = 18$ majori.

Esto A minor, maj. erit $Z - A$, erg. iterum $ZA - Aq = Bq$
per negativam partem prioris reg. $A = 8$ minori.

Curiosus Lector, & qui voluptatem capit in Problematibus resolvendis, plura hujus generis in *Clavii* Algebra reperiat, etiam & in Authoris cap. 19, multa exempla geometrica ad has duas regulas spectantia habuerit, quæ quidem, his intellectis, explicatione non indigent; ideoque & ex monito Authoris ad calcem Problematis 14 capitis istius, ulteriorem explicationem omissimus, præterquam eorum quæ habentur circa Progressionem Arithmeticam ad Problema sextum ibidem.

Certe in hoc capite Sagacissimus *Oughtredus* abditissima reclusit mysteria, & quod mirabile dictu ex primis

mis atque facillimis illis æquationibus, in cap. 11. ingentem extraxit thesaurum; nimirum post alia quorum suavis admodum est contemplatio atque scientia utilissima, æquationum tum genesin tum analysin exposuit non modo sed & una demonstravit; pergit Author binomiorum & triangulorum praxin ex iisdem fœcundis juxta atque facillimis principiis instituere, pulcherrima sane methodo, adeo ut pro singulis centum immolasse boves sit justo longe minus.

Et quod ad genesin & analysin sex illorum binomiorum quæ ab *Euclide*, 10. el. celebrantur, ostendit, primo, quomodo quadrentur; dein, quomodo radices quadratæ extrahantur.

Intellectis iis quæ jam exposuimus, præsertim in cap. 15. una cum aliquali scientia in decimo elementorum horum binomiorum tum genesin tum analysin percipere non erit difficile; qui autem priora non capiunt, vereor ne oleum & operam perdant.

10. Pro genesi binomiorum ex lateribus suis surdis regula est Z$\supset$+2Æ=Zq.

Pro residuorum regula esto Z$\supset$—2Æ = Xq.

Z$\supset$ + 2Æ = Zq nempe, quia per cap. 11. Zq = (Aq +Eq) + 2AE, ex hac æquatione quæ quartam secundi elem. exponit, facile est cujuslibet binomii etiam rationalis quadratum in duobus nominibus exhibere; ut quadratus ex (6 + 4) = 10 constat ex Qu. 6 = 36 & Qu. 4 = 16 constat (inquam) ex quadratis 36 & 16 additis = 52, pro nomine majore, cui, pro nomine minore, adde per signum + rectang. duplum ex 4+6 = &c. 48 = 2Æ, habebis quadratum in duobus nominibus (52+ 48) = 100.

In

In exemplo primo duo nomina sunt, 4 & *r* 11; quadretur 4, & fit 16; quadretur *r* 11, abjiciendo signum radicale, & fit 11: ex 16 & 11 additis erit 27. = Zↄ. pro nomine majore; tum, pro minore, per 10 & 11. cap. 15. ex *r* 16 = 4 in *r* 11, fit rectangulum *r* 176, cujus duplum est *r* 704 = 2Æ, *sc.* multiplicando *r* 176 per *r* 4 = 2, attollendo 2 ad *r* 4:

ergo Zↄ + 2Æ = Zq,
hoc est, 27 + *r* 704 = Qu. 4 + *r* 11.

In secundo exemplo observabis quod fit nominum reductio, nempe, per 7 15 hujus reducuntur *r* 12 & *r* $\frac{27}{4}$ ad eundem denominatorem, *sc.* ad *r* $\frac{48}{4}$ + *r* $\frac{27}{4}$, & comparando per crucem, ut in cap. 10. hujus, reducuntur ad minimos terminos,—ita, *r* qq 12 + *r* qq $\frac{27}{4}$ comparando per crucem.

$$\text{M.C.M.}4\Big)\frac{\overset{3}{\cancel{12}}}{1}\qquad\frac{27}{\underset{1}{\cancel{4}}}\quad r.\ \text{habes } r\,qq\,3 + r\,qq\,27.$$

11. Ex genesi æquationum, in cap. 11. sicut posuis in principio, A+E=Z, inde fit Aq+2AE+Eq=Zq; ita, si in principio posuisses Aq+Eq=Zↄ, inde fuisset Zↄq = Aqq+2AqEq + Eqq, atque ex eodem rationis ductu, $\frac{Z\text{ↄ}}{2} + \frac{X\text{ↄ}}{2}$ = Aq & $\frac{1}{4}$ Zↄq — Æq = $\frac{1}{4}$ Xↄq.

Unde pro analysi binomii regula esto,

$\frac{1}{2}$ Zↄ $\pm$ *r.u.* $\frac{1}{4}$ Zↄ q — Æq : ($\frac{1}{2}$ Xↄ) = $\frac{\text{Aq}}{\text{Eq}}$

In exemplo primo Æ est *r* $\frac{704}{4}$, quia *r* 704 est minus nomen = 2Æ; si ergo dividas per 2 = *r* 4, erit Æ = *r* $\frac{704}{4}$.

In hoc exemplo $\frac{27}{2}$ + $\frac{5}{2}$ sunt = $\frac{32}{2}$ = 16, cujus latus est 4.

12. At-

12. Atque hic obiter trianguli rectanguli plani genesis se offert, quia $Zq = Xq + 4Æ$; nam per c. 11. $Zq - Xq = 4Æ$, ideoque per antithesin $Zq = Xq + 4Æ$; nempe $Hq = Bq + Cq$, per 47. 1. el. per H intelligit hypothenusam, per B basin, per C cathetum sive perpendicularem.

Quod si velis ex binis lineis sive numeris $A = 2$ & $E = 1$ triangulum rectangulum constituere, quoniam per 47 el. 1. unum quadratum, nempe hypothenusæ sive lineæ subtendentis, angulum rectum, æquatur duobus quadratis, *sc.* crurum basis & catheti; & per 11. hujus, unum quadratum, nempe $Zq = Aq + 2AE + Eq$, æquatur duobus, *scil.* $Xq = Aq - 2AE + Eq$, una cum $4Æ$; dico unum quadratum $Zq =$ duobus $Xq + 4Æ$, ideo supponas $4Æ$ esse duorum quadratorum alterum, latera igitur erunt $A + E$ (latus ex $Aq + 2AE + Eq$,) $A - E$ (latus ex $Aq - 2AE + Eq$,) & $r\,4AE$; laterum (inquam) trianguli erit primum pro hypothenusa trianguli, $A + E = 2 + 1 = 3$; secundum, pro basi, $A - E = 2 - 1 = 1$; & tertium, pro catheto, erit $r\,4AE. = r\,4 \times 2 \times 1. = r\,8$.

Jam quoniam radix $4AE$ est surda, ideoque exprimi nequit ut surditas illa (si ita loquar) evitetur; A & E, species in principio positæ, mutabuntur in Aq & Eq; atque ita ut in sectione 11 hujus capitis ostendimus $Z\text{ɔ}q = X\text{ɔ}q + 4AqEq$, jam radix $4\,Aq\,Eq$ potest exprimi, est nempe $2AE$: latera ergo erunt, pro hypothenusa, $Z\text{ɔ} = Aq + Eq = 4 + 1 = 5$; secundum, pro basi, erit $X\text{ɔ} = Aq - Eq = 4 - 1. = 3$; & tertium, pro catheto, erit $r\,4AqEq = 2Æ. = 2 \times 2 \times 1. = 4$: latera ergo sunt, ut habet Author, 5. 3. 4.

13. Datis

13. Datis binis triangulis rectangulis H. B. C. & h. b. c. tertium ex ipſis fabricare, idque dupliciter,

$$\left.\begin{array}{l}\text{1. quia } Bq = Hq - Cq \\ \text{\& } bq = hq - cq\end{array}\right\}\text{ multiplicentur invicem.}$$

Eritque, &c.

Literæ majores, H B C, ponuntur pro lateribus majoris trianguli; & literæ minores, h b c, pro lateribus minoris.

Multiplicentur invicem; nam ſi æqualia æqualibus multiplices facta erunt æqualia; ergo ex Bq in bq fit unum quadratum, Bq bq, cujus radix Bb; ex Hq—Cq in hq—cq, fit (Hq hq—Hq cq—Cq hq+Cq cq) = Hq hq + Cq cq minus Hq cq + Cq hq duobus quadratis; dico unum quadratum Bq bq = Hq hq + Cq cq min. Hq cq + Cq hq duobus quadr. ideoque æquatio ad triangulum applicetur per 47. 1. el.

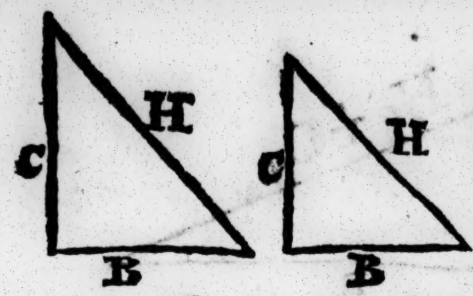
Dices, Unde ſciam ultimam partem æquationis conſtare ex duobus quadratis? Reſpondeo, Docet Author in proximis. Nam Q. Hh + Cc, hoc eſt, quadrando Hh + Cc, habebis Hq hq + Cq cq + 2HC hc; & ſimiliter quadrando Hc + Ch, habebis Hq cq + Cq hq + 2 HC hc; tum ſubtrahendo unum quadratum ex altero per ſigna contraria, videbis quod — 2HC hc expunget + 2HC hc; & erit,

Unum quadr. Bqbq=Hqhq+ Cqcq min. Hqcq + Cq hq = duobus quadratis. Sive quod idem eſt,

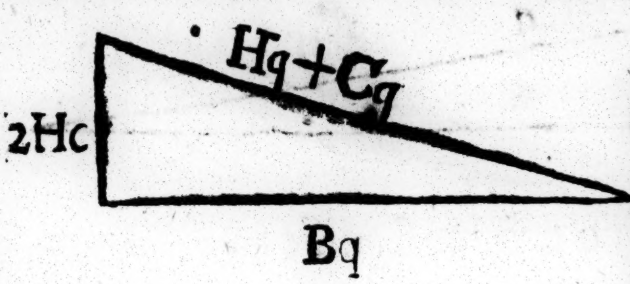
Bqbq=Q. Hh+Cc min. Q. Hc+Ch; & erunt latera extrahendo radices

Bb. Hh+Cc. Hc+Ch; quæ ſit regula prima.

Quæ



Quæ ſequuntur de angulis ſimplis, duplis, &c. una cum primis ſectionibus cap. 17. pertinent ad magna myſteria angularium ſectionum, quarum gratia conſulere potes *Vietam* & *Anderſonum* ibidem. Omnes literæ in regulis ſupponuntur eſſe majores pro prima operatione qua triang. ſunt æqualia; ac ſi regul. 1. eſſet BB. HH+CC. HC+CH. Et difficultas omnis mox evaneſceret ſi velles ad regulas attendere: nam dicit regula inprimis BB, id eſt, baſis unius ducatur in baſin alterius pro nova baſe; erg. ex B in B fit Bq.

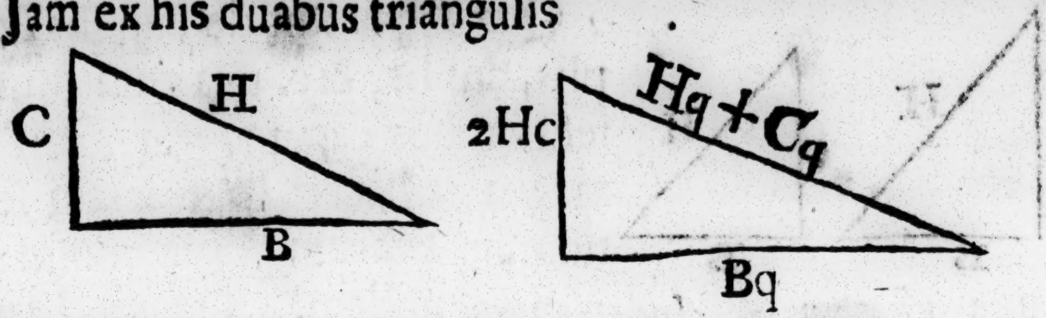


Tum dicit regula ad proximum punctum pro hypothenuſa novi trianguli HH+CC, hoc eſt, ſume rectangulum ſub hypothenuſis, plus rectangulo ſub cathetis, hoc eſt, Hq+Cq.

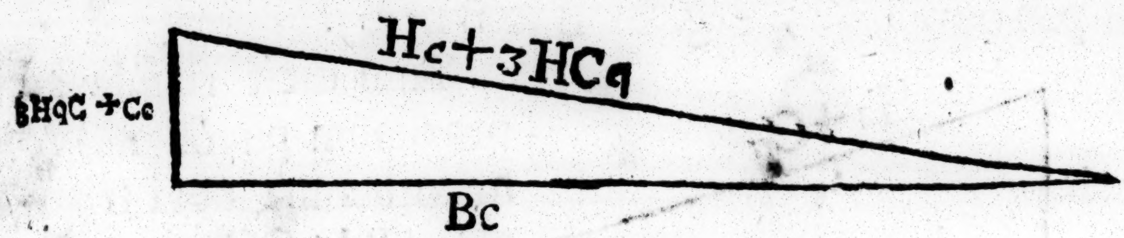
Ultimo dicit regula pro catheto novi trianguli HC+CH, id eſt, ſume rectangulum ſub hypothenuſa primi & catheto ſecundi auctum rectangulo ſub catheto primi & hypothenuſa ſecundi; id eſt, duplum rectangulum ſub hypothenuſa & catheto, id eſt, HC + HC = 2HC; atque ita angulus baſi oppoſitus, in novo triangulo, erit duplus anguli reſpondentis in ſimplice triangulo.

Jam

Jam ex his duabus triangulis



fabricabis tertium pro triplo angulo ad basin opposito multiplicando latera hæc inventa per H. B. C. juxta regulam Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.
stent ita, Bq. Hq+Cq. 2HC.
B. H. C.



Litera c minor hic cubum significat.
Cc=C cubo.

Pro base duc B in Bq, fit Bc pro hypoth. ut regula Hh+Cc præcipit: duc H in Hq+Cq & C in 2HC, habebis Hc + 3HCq; tum pro catheto, ut vult regula Hc +Ch, duc Hq+Cq in C & 2HC in H, habebis 3HqC +Cc.

Reliqua ex his facillime intelliguntur.

Quando duplus angulus rectum excedit, quid tum fit vide Authores prædictos, ut & pro primis sectionibus, in proximo capite, in quibus applicat Author ea quæ hic demonstrantur ad species posterioris tabulæ.

Monitum Interpretis.

Curiosus Lector uberioris satisfactionis causa consu-

lat

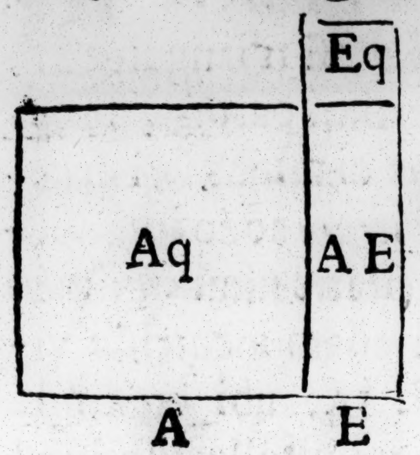
lat *Vietæ* Logist. prop. 45. &c. de Genesi triangulorum, ut & alias ejusdem viri longe celeberrimi partes, propter alias causas, si nostra mediocritas ei minus satisfecerit; nam Author noster oculum in *Vietam* adeo intendisse videtur, ut nonnunquam in obscuritatis nimiæ crimen & usque ad erroris alicujus speciem etiam incurrisse videatur, ut diximus in cap. 15. sect. 14. ubi credibile est *Oughtred.* per expurgationem idem intellexisse quod *Vieta* in lib. de Emend. Æquat. id est, liberationem potestatis ab adfectionibus, *viz.* sub gradu ejusdem & alia magnitudine data, per mutuas expunctiones in summa, ut inter operandum juxta regulas multiplicationis expositas facile appareat; sic pag. 80. lin. 12. hujus : —Bq liberatur à BA. BE.

Sed verba simpliciter prolata sine ullo alio apparatu alterius generis expunctionem requirere videantur, ut ibidem diximus, nec dictorum pœnitet.

CAP. XVII.

Alia tabulæ posterioris in cap. 12. inspectio, quoad Æquationes.

5. OMnes cujusque ordinis intermediæ species sunt etiam potestates mediorum inter A & E proportionalium, ut in ordine quadratico Aq+2AE+Eq, est AE medium proportionale inter Aq & Eq, hoc est, ut Aq. Æ : : Æ. Eq; nam operando speciosè per auream regulam, Aq. AE : : AE. $\frac{AqEq}{Aq}$, hoc est, Eq.



Aq.AE :: A.E :: Æ.Eq. per 1.6.el.

Et ſi poteſtates ſint proportionales, etiam & latera erunt per 22. 6. Si erg. Aq. AE : : Æ. Eq. etiam ut A *r* AE : : *r* Æ. E. Si Ac. 3AqE. 3AEq. Ec ∺ etiam & *r* A. *r* c AqE. *r* c AEq. E ∺ ſunt continue proportionales; nempe A. M. N. E. nam AqE & AEq reputantur pro ſolidis ex tribus dimenſionibus conſtantibus, licet non habeant radices rationales ſed ſurdas, puta M & N. ac ſi AqE conſtaret ex A in M in N. eſt autem AMN=Mc. nam ſi ſit A. M : : M. N. erg. Mq=AN. duc utramque partem in M. erit Mc=AMN.

Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E: ut ſi velis quinque medios terminos proportionales, poteſtates indicem habebunt $\boxed{6}$ ſive Cc. unitate majorem quam numerus quæſitorum mediorum: eruntque (præfigendo ſignum radicale cubo-cubicum (*r* cc) omnibus intermediis ſpeciebus in illo ordine juxta tabulam poſteriorem.)

A. *r*cc AqcE. *r*cc AqqEq. *r*cc AcEc. *r*cc AqEqq. *r*cc AEqcE. ∺

6. Facile eſt radicis binomiæ datæ A+*r*Æ, poteſtatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter poteſtates nominum extremas) conſtruere: certe facile eſt, ſed non niſi memineris quomodo radices ſurdæ multi-

plicari

plicari debent; nempe ex A in r Æ fit r AqÆ, attollendo A ad r Aq=A, ut ad cap. 15. docuimus; & ex r Æ in r Æ fit Æ; abjiciendo signum radicale ex r Æ in Æ fit r Æc, attollendo Æ ad r Æq=Æ.

			Ac		
		Aq			
Ita,	A		3 r AqqÆ		&c. ad modum tabul. post-
	r Æ	2 r AqÆ			
			3 r AqÆq		
		Æ			
			r Æc.		

11. Mirum est quod unciæ sive numeri speciebus præfixi, in tabula posteriore, sunt figuræ numerariæ: surgunt ergo ab unitate continue in geometrica proportione, quandoquidem uncia potestatis diagonalis est unitas.

0 1A	1Aq	1Ac	&c.	rad.	quadr.	cub.
1 +	2AE	3AqE		2	4	8
0 1	1Eq	3AEq			planum sive triangulare	solidum sive pyramidale
		1Ec				
1 2	4	8				

CAP. XVIII.

2\. Q. 1. = 9 Q. $\frac{1}{3}$, hoc est, Q. 1. = 9 in Q. $\frac{1}{3}$; nam Quadrat. $\frac{1}{3}$ est $\frac{1}{9}$; sed ex 9 in $\frac{1}{9}$ fit $\frac{9}{9}$ = 1.

Ita Q. 1. = $\frac{1}{9}$ Q. 3; nam Q. 3 est 9, sed 9 in $\frac{1}{9}$ fit $\frac{9}{9}$ = 1; atque ita reliqua resolvuntur, per cap. 10. hujus.

4\. Datis igitur summa trium $\div\!\div$ (Aq+Æ+Eq) cum alterutro extremorum dantur duo reliqui termini, nam Qu. $\frac{1}{2}$A+E est = $\frac{1}{4}$Aq+Æ+Eq = Aq+Æ+Eq-$\frac{3}{4}$Aq

quia $\frac{1}{4}$ Aq = Aq — $\frac{3}{4}$ Aq

erg. *r. u.* (Aq+Æ+Eq—$\frac{3}{4}$Aq) = $\frac{1}{2}$A+E minus $\frac{1}{2}$A = E.
& *r. u.* (Aq+Æ+Eq—$\frac{3}{4}$Eq) = $\frac{1}{2}$E+A minus $\frac{1}{2}$E = A.

CAP. XIX.

PRobl. VI. hic locus quosdam satis exercuit, ideoque pauca annotare placet. Prima & secunda propos. per rationem constituuntur, reliquæ ex iis, & unæ ex aliis deinceps sequuntur.

Hæc æquatio (TX—X = ω—α, summa differentiarum) per rationem omnibus in loco manifestam constituitur; divide utramque partem per T—1, oritur

2\. prop. $\frac{\omega - \alpha}{T - 1}$ = X.

Prima propositio, Tω+Tα = 2Z, etiam per rationem constituitur, non omnibus adeo obviam.

Sint

$\alpha = 0$	adde	$10 = 10$	
2	adde	$8 = 10$	
4	adde	$6 = 10$	
6	adde	$4 = 10$	
8	adde	$2 = 10$	
Med. ter. 10	$=$	10	
12	tolle	$2 = 10$	
14	tolle	$4 = 10$	
16	tolle	$6 = 10$	
18	tolle	$8 = 10$	
$\omega = 20$	tolle	$10 = 10$	

Sint 0.2.4.6.&c.arithm. proporti. T numerus terminorum $= 11$.

Hinc manifestum est quod si 11, numerus terminorum, ducatur in medium terminum 10, fiet summa omnium term. $= 110$; quod si idem 11 ducatur in duplum termini medii, *viz.* in 20, fiet numerus ad summam terminorum duplus, *viz.* 220: noverit autem unusquisque quod in arithm. progressione extremi additi faciunt duplum medii $20 + 0 = 10 + 10$; uti in geomet. progres. per cathol. theor. factus à medio æquatur facto ab extremis.

Hinc liquet, quod si addatur primus terminus α ad ω, ita, $\alpha + \omega$, & summa ducatur in numerum terminorum T, per rationem constituetur æquatio $T\alpha + T\omega = 2Z$.

Problem. VI. Problematum circa, &c.

IV.

$\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$ per 1. 3. nempe prima pars tertiæ æquationis substituenda est loco T. in prima primæ, &c.

VIII.

$(TX - X + 2\alpha)$ in $T = 2Z$ per 1. 7. prima pars

ſeptimæ æquationis ſubſtituenda eſt loco ω in prima primæ.

X.

$\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$. per 8. per antitheſin & parabol.

XI.

r. u. $\frac{1}{4}Xq + 2ZX + \alpha q - X\alpha$: minus $\frac{1}{2}X = \omega$, per 4. inde

fit $\overset{2}{\omega q} + \overset{1}{X\omega} = \overset{0}{\overbrace{2ZX + \alpha q - X\alpha}}$

erg. per 9. cap. 16. *r. u.* $\frac{1}{4}Xq. + 2ZX$, &c.

XII.

Si $B = 2\alpha - X$ erit

r. u. $\frac{Bq}{4Xq} + \frac{2Z}{X}$ minus $\frac{B}{2X} = T$. per 8. inde

fit $TqX - TX + 2T\alpha = 2Z$. divide utramq; part. per X

erit $\overset{2}{Tq} + \overset{1}{\overbrace{\frac{T2\alpha - Tx}{X}}} = \overset{0}{\frac{2Z}{X}}$ co-efficiens eſt $\frac{2\alpha - X}{X}$

quæritur T minor per poſteriorem partem regulæ ſecundæ in cap. 16. & caſum tertium.

XVII.

r. u. $\frac{1}{4}Xq + \omega q + X\omega - 2ZX$ plus $\frac{1}{2}X = \alpha$, per 4. inde

fit $\overset{2}{\alpha q} - \overset{1}{X\alpha} = \overset{0}{\overbrace{\omega q + X\omega - 2ZX}}$.

erg. per 16. cap. *r. u.* $\frac{1}{4}Xq$, &c. quæritur α major & $(\omega q + X\omega - 2ZX)$ eſt rectangulum.

XVIII.

XVIII.

$\frac{2\omega+X}{2X}$ minus *r. u.* $\frac{4\omega q+4X\omega+Xq-2Z4X}{4Xq}=T$, per 14.

inde fit $\overbrace{\frac{2T\omega+TX}{X}}^{1}-\overset{2}{Tq}=\overset{0}{\frac{2Z}{X}}$: pertinet ad posteriorem partem primæ regulæ; co-efficiens est $\frac{2\omega+X}{X}$, cujus quadratum est $\frac{4\omega q+4\omega x+Xq}{Xq}$

XIX.

$\frac{2Z}{2T}-\frac{TX}{2}+\frac{X}{2}=\alpha$: per 10. inde fit $\frac{2Z-Tqx+Tx}{2T}=\alpha$. hinc dividendo juxta caput 10. fit $\frac{2Z}{2T}-\frac{Tx}{2}+\frac{X}{2}=\alpha$.

XX.

$\frac{2Z}{T}$, &c. male pingitur $\frac{2Z}{T}$ pro $\frac{2Z}{2T}$, &c. nam per propositionem 16 & isomeriam fit $Tqx-Tx=2T\omega-2Z$ tum per antith. & dividendo fit $\frac{Tqx-Tx+2Z}{2T}=\omega$.

CAP. XX.

De Æquationum adfectarum Resolutione in Numeris.

QUomodo æquationes adfectæ, quæ æqualiter in tribus speciebus ascendunt, ope duarum regularum resolvantur, jam supra, cap. 16. ostendimus; atque ad resolutionem in numeris arithmeticè, æquationum, etiam inæqualiter (quoad indices suos, ut $\overset{4}{\mathrm{Lqq}} + \overset{1}{\mathrm{Dcl}} = \overset{0}{\mathrm{Fqq}}$) scandentium, viam ibidem præparavimus; de iisdem hoc loco fusius tractaturi ut nemo non Authorem nostrum intelligat, modo mediocri usus diligentia, in legendo (ut sic dicam) æqualiter scandat: id autem primo loco monendum, quod *Cardanus* regulam tradidit, qua resolvantur æquationes cubicæ in tribus speciebus etiam inæqualiter ascendentibus, ut $\overset{3}{\mathrm{Lc}} + \overset{1}{\mathrm{Cql}} = \overset{0}{\mathrm{Dc}}$, sive $Ac + BA = D$, per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoscitur. Regula est,

$$rC.+\tfrac{1}{2}D+r\tfrac{1}{4}DD+\tfrac{1}{27}Bc-rC.-\tfrac{1}{2}D+r\tfrac{1}{4}DD+\tfrac{1}{27}Bc = \text{radici}$$

Verum pro harum cubicarum æquationum resolutione, curiosus Lector consulat D. *Florim. de Beaune* in D. *Cartes*. Geom. & Præstantissimi Mathematici *Fr. à Schooten*, Tractatum de Cubicarum æquationum resolutione eruditissimum: tum etiam *Vietam*, Mathematicum monstrosi ingenii, horum omnium & (ne quid dissimulem) etiam Authoris nostri, utut subtilissimi Ma-

gistrum,

gistrum, De emendatione æquationum, &c. quo pacto æquationes ad faciliores alias atque alias formas reducantur atque reformentur.

Præsertim autem legat Magistrum De numerosa potestatum resolutione, cui respondet hic Tractatus Authoris, qui *Vietam* in nitidissimam formam concinnavit; verum enimvero, dum brevior esse laboravit, factus est longe obscurior, adeoque ut vix putem Lectorum vicesimum, Authorem nostrum sine adjutore, intellecturum, nisi forte multoties legendo & relegendo, quod quotusquisque mortalium tam ferrei sit pectoris ut sustinuerit: conabor illa (atque illo ordine) proferre quibus uterque Author, tum *Oughtredus* tum ipse *Vieta*, facilius intelligantur: in hunc finem lege iterum, si placet, ea prius quæ annotavimus in sect. 4. cap. 13.

Tum consulenda Tabula æquationum adfectarum, quam affabre fabricavit Author ex posteriori tabula, ut quivis ex utriusque collatione facile potest percipere; illa, distinctionis causa, tabula gnomonica appelletur.

$$\left.\begin{array}{l|l|ll} Lq = & Aq. & 2AE. & Eq \\ Bl = & BA. & BE. & \end{array}\right\} = Cq$$

Esto hic primus ordo quadraticarum adfectarum æquationum, & L esto radix binomia $= A + E$, cujus A est latus singulare primum, E est latus singulare secundum: ex hoc autem ordine unum solummodo æquationum genus, quod ad species ipsas attinet, exsurget, nempe, $Aq + 2AE + Eq + BA + BE = Cq$: sive, $Lq + Bl = Cq$: in hac æquatione L est radix investiganda, B numerus co-efficiens datus, Cq est numerus datus, qui venit sub nomine potestatis resolvendæ juxta

artis

artis leges & methodum, ita ut radix L = A + E inveniatur: puta æquationem, cujus in ſect. 4. 13. cap. geneſis proponitur, Lq + Bl = Cq, ſive Lq + 3l = 3420. 3420 eſt poteſtas adfecta reſolvenda, ita ut inveniatur L = 57; ſic autem ad hujus æquationis reſolutionem te accinges problematicè proponendo, E dato in numeris (Lq) quadrato adfecto adjunctione plani ſub latere (L) & data co-efficiente longitudine (3) *viz.* Lq + 3L = 3420, latus analyticè educere. Ad lateris eductionem ſciendum quod hæ duæ ſpecies, Aq BA, in media columna, ſunt diagonales pro latere primo = A, tres reliquæ (2ÆE. Eq. BE.) complent gnomonem pro lateribus ſequentibus ſingularibus.

Quo melius purarum poteſtatum reſolutionem, juxta caput 14. intellexeris, eo minus in adfectarum analyſi laborabis, ſiquidem valde ſimili modo proceditur; ſunt tamen non leves differentiæ, quarum tres hoc loco notabimus.

1. Ibi punctabas poteſtatem reſolvendam uno tantum modo, nempe pro ſuo genere, punctis binis, pro quadrato, (ternis, pro cubo, &c.) ut deſuper, ita, 3420. Hic autem poteſtatem etiam punctabis infra, pro co-efficientium genere, *ſcil.* punctis lateralibus, ſi co-efficiens ducatur in longitudinem; (quadraticis, ſi in planum; cubicis, ſi in ſolidum, &c.) ut in præſenti exemplo, ita, 3420

Et in punctando hæc eſto regula perpetua, *viz.* quot fuerint puncta ſuperiora tot ſint & inferiora; & ſub ultimo puncto verſus ſiniſtram ſtabit co-efficiens,

ut

ut . . puncta quadratica.

3420

.. puncta duo etiam lateralia.

3 co-efficiens in proprio loco.

2. Ibi tollis è potestate resolvenda, lateris primi solam diagonalem potestatem, ut (in quadraticis) Aq: hic autem & altera species diagonalis BA tollenda (vel omnes species diagonales tollendæ si plures sint,) ita,

. . punct. quadr.

radix 57) 3420

.. puncta lateralia.

radix quad. primi puncti 34 = 5 = A   3 co-efficiens in proprio loco.

25 Aq } species diagon.
15 BA }

265 summa ablatitia è potest. resolvend.

770 residuum potest. resolvend.

3. Ibi legitimè conflabas divisorem ex latere A invento: hic etiam co-efficiens in numerum divisorum adscribatur, co-efficiens autem in singulis operationibus movebitur uno puncto propius versus dextram, ita,

pro

pro E.

divide 770 per 103, & perfice gnomonem, ut tabula requirit	770	residuum potest. resolv.	
	3	co-efficiens motus	divisores.
	10	2A	
	103	summa divisorum.	
E = 7 radici lateri secundo	70	2AE	gnomon.
	49	Eq	
	21	BE	
	770	summa tollenda è residuo potestatis resolvendæ, & restat o.	

$$\left.\begin{array}{l} Lc = \\ Blq = \\ Cql = \end{array}\left\{\begin{array}{l} Ac\,. \\ BAq. \\ CqA. \end{array}\right| \begin{array}{l} 3AqE.\ 3AEq.\ Ec \\ B2AE.\ BEq \\ CqE \end{array}\right\} = Dc. \text{ num. resolvendo dato.}$$

Esto hic ordo secundus & cubicarum æquationum, quarum tria genera; nam $Lc + Blq = Dc.$
vel $Lc + Cql = Dc.$
vel $Lc + Blq + Cql = Dc.$

Exempli causa, proponatur problematicè cubus adfectus resolvendus, ita, ex dato in numeris cubo (Dc) adfecto adjunctione duorum solidorum, uno ex co-efficiente longitudine (B = 2) ducta in quadratum lateris (Lq) altero ex co-efficiente plano (Cq = 3) ducto in latus (L) latus analyticè educere:

Esto

Esto $Lc + 2Lq + 3L = 191862$.

. . duo puncta cubica.

Potestas resolvenda 191862 (57 radix.

. . duo puncta lateralia, pro Cq, quia ducitur in latus.

. . duo puncta quadratica, pro B, quia ducitur in lateris quadratum.

A latus primum = 5 invenitur extrahend. rad. cub. ex primo puncto = 191.

$\left.\begin{array}{ll} 2 & = B \\ 3 & = cq \end{array}\right\}$ co-efficientes in suis locis.

$\left.\begin{array}{ll} 125 & Ac \\ 50 & BAq \\ 15 & CqA \end{array}\right\}$ species diagonales.

13015 summa ablatitia è potest. resolv.

61712 residuum potest. resolv.

$\left.\begin{array}{ll} 75 & 3Aq \\ 15 & 3A \\ 20 & B2A \\ 2 & B \\ 3 & Cq \end{array}\right\}$ divisores legitimè conflati juxta tabulam, ex latere $A = 5$ invento, & co-efficientibus datis.

7855 summa divisorum per quam dividatur resid. pot. resolvendæ = 61712, oritur $7 = E$, qui scribatur in quoto pro latere secundo.

$\left.\begin{array}{ll} 525 & 3AqE \\ 735 & 3AEq \\ 343 & Ec \\ 140 & B2AE \\ 98 & BEq \\ 21 & CqE \end{array}\right\}$ gnomon auferend. è resid. pot. resolv. unde restat nihil, & operatio perficitur invento $L = 57$.

61712 summa = resid. potest. resolv.

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Lqq} = \\ \mathrm{Blc} = \\ \mathrm{Cqlq} = \\ \mathrm{Dcl} = \end{array}\left\{\begin{array}{l|l} \mathrm{Aqq.} & \mathrm{4AcE.6AqEq.4AEc.Eqq} \\ \mathrm{BAc.} & \mathrm{B3AqE.B3AEq.BEc} \\ \mathrm{CqAq.} & \mathrm{Cq2AE.\ CqEq} \\ \mathrm{DcA.} & \mathrm{DcE.} \end{array}\right.\right\} = \mathrm{Fqq.}$$

Tertius hic ordo est æquationum quadrato-quadraticarum, quarum septem sunt genera; & quoniam species omnes (omissis unciis) in hoc, ut & in aliis ordinibus, æquales habere debent dimensiones, ut antea fuse est expositum in c. 16. ideo co-efficientes numeri (qui hic & ubique consonantibus exprimuntur) attolluntur ad gradum, qui in hunc finem requiritur.

Non enim dico, Lqq+Bqlc+Clq+Dl=F.

Sed ita, Lqq+Blc+Cqlq+Dcl=Fqq.

Ideoque & videbis omnes species in tabula his respondentes constare ex quatuor dimens. tum diagonales Aqq, BAc, &c. tum gnomonicas 4AcE, 6AqEq, &c.

Quamvis igitur inter operandum forte pervenires ad talem æquationem, Lqq+Bqlc+Clq+Dl=F; debes tamen concipere Bq (in Bqlc) esse tantum longitudinem, & D (in Dl) esse solidum, & F, numerum è regione datum, esse quadrato-quadratum.

Quod si inter operandum forte pervenires (comparando magnitudines tum quæsitas tum datas) ad talem æquationem, Aqq+BAc+CAq+DA=F; dico hanc æquationem esse quadrato-quadraticam, & huic respondere Lqq+Blc+Cqlq+Dcl=Fqq; ideoque & concipere debes ipsam speciem A (ipsam, inquam, A) constare ex duobus nominibus, nempe A+E, quamobrem cofusionis vel obscuritatis vitandæ causa, radicem investigandam in hoc capite per (L) exprimi curavimus.

Denique

Denique ſi æquatio nullas haberet co-efficientes, ut,

$$Lqq+Lc+Lq+L=Fqq;$$

debet in hoc caſu, unitas ubique ſubintelligi loco co-efficientis, ac ſi ſcriptum eſſet, $Lqq+1Lc+1Lq+1L=Fqq$. & 1 in (Lc) eſſet longit. $=B$, 1 in (Lq) planum $=Cq$. 1 in (L) ſolidum $=Dc$, ideoque reſponderet huic formæ, $Lqq+Blc+Cqlq+Dcl=Fqq$:

Sub hoc ordine, exempli cauſa, proponatur reſolvenda poteſtas quadrato-quadratica adfecta adjunctione planoplani ſub lateris cubo & data co-efficiente longitudine $B=10$.

Nempe conſtabit ex duabus primis ſeriebus in hoc ordine, $Lqq+Blc=Fqq$,

ſive, $Lqq+10Lc=470016$, poteſtas quad-quadr. adfecta.

	· ·	puncta quadrato-quadratica.
Poteſtas reſolvenda.	470016	(24. radix inveſtiganda.
	· ·	puncta cubica pro co-efficiente longitudine ſubcubica $B=10$.
Caute locabis co-efficientem quia dirigit modum locandi ſpecies in quas ducitur, ut poſtea planius intelliges. Et pro A extrahe radicem quad.quadr. è primo puncto, nempe 47=2	10	co-efficiens in ſuo loco.
	16	Aqq } plano-plana diagonalia auferenda è poteſt. reſolv.
	80	BAc }
	240	ſumma ablatitia.
	230016	reſid. poteſt. reſolvendæ.

32	4Ac	divisores.
24	6Aq	
8	4A	
120	B3Aq	
60	B3A	
10	B	

47090 summa divisorum per quam divide resid. potest. resolv. = 230016 oritur 4 = E.

Dividendo invenitur minus latus = E per quod mox gnomon perficiendus juxta tabulam, ut vides.

128	4AcE	gnomon. auferend. è potest, resolv. unde rest. o.
384	6AqEq	
512	4AEc	
256	Eqq	
480	B3AqE	
960	B3AEq	
640	BEc	

230016 summa plano-planorum auferenda, æqualis residuo potestatis resolvendæ.

Quintus ordo est quadrato-cubicarum æquationum.

Lqc =	Aqc	5AqqE. 10AcEq. 10AqEc. 5AEqq. Eqc	= Gqc
Blqq =	BAqq	B4AcE. B6AqEq. B4AEc. BEqq.	
Cqlc =	CqAc	Cq3AqE. Cq3AEq. CqEc.	
Dclq =	DcAq	Dc2AE. DcEq.	
Fqql =	FqqA	FqqE.	

In hoc ordine potest æquatio constare ex 5 speciebus, nempe, Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq + Fqql = Gqc; quibus quinq; speciebus respondent in tabula 20 species, *scil.* Aqc, 5AqqE, 10AcEq, &c. nam quoniam radix

(L) investiganda concipitur constare ex duobus nominibus A + E; ergo juxta tabulam posteriorem Lqc, Lqc erit = Aqc + 5 AqqE + 10 AcEq + 10 Aq Ec + 5AEqq + Eqc: & similiter in parodicis gradibus ad altissimam potestatem (Lqc) intelligendum, nempe, in Lqq, Lc, Lq.

Potest etiam æquatio quadrato-cubica constare ex quatuor speciebus, ita, Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq = Gqc.

vel tribus, ita, Lqc + Blqq + Cqlc = Gqc.

vel tantum ex duabus, ita, $\left\{\begin{array}{l}\text{Lqc + Blqq = Gqc.}\\ \text{Lqc + Cqlc = Gqc.}\end{array}\right.$

&c.

Ita ut æquationes quadrato-cubicæ 15 Variis modis exhiberi possint; atque ad hunc ordinem pertinet exemplum *Oughtredi*; ad cujus pleniorem intelligentiam præmittemus alterius exempli tum genesin tum analysin, *scil.* Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = Gqc, sine co-efficientibus aliis præter unitates, quæ subintelligi debent, ac si script. esset Lqc + Blqq + Cqlc + Dclq + Fqql = Gqc.

sive, Lqc + 1Lqq + 1Lc + 1Lq + 1L = 5399042.

B = 1 Cq = 1 Dc = 1 Fqq = 1.

Esto genesis quadrato-cubi adfecti adjunctione quatuor plano-solidorum, *scil.* 1Lqq + 1Lc 1Lq + 1L.

ex radice binomia, A = 2 & E = 2.

revera ex A = 20 & E = 2.

Punctabis autem radicem pro quatuor complementorum speciebus, ita, 2 . . . . 2, interponendis inter quadrato-cubos diagonales, Aqc & Eqc, diligenter observando sedes tum diagonalium potestatum lateris primi, tum gnomonicarum, ut in exemplo.

Quod etenim ad locationes poteſtatum, citius eas diſces ab exemplorum quam verborum multitudine.

Pro geneſi) 2 2

32	Aqc	diagonales poteſtates lateris primi.
16	BAqq	
8	CqAc	
4	DcAq	
2	FqqA	
336842	ſumma diagonalium.	
160	5AqqE	quadratocubicus
320	10AcEq	
320	10AqEc	
160	5AEqq	
32	Eqc	
64	B4AcE	quadr. quadraticus
96	B6AqEq	
64	B4AEc	
16	BEqq	
24	Cq3AqE	cubicus
24	Cq3AEq	
8	CqEc	
8	Dc2AE	quadraticus
4	DcEq	
2	FqqE	lateralis

gnomon.

2030622 ſumma gnomonica quæ addenda ſummæ diagonalium.

5399042 summa totalis=potest. adfectæ, qc.

. . puncta superiora.

Potestas resolvenda. 5399042 (22. radix.

Pro analysi) . . . . : puncta bina & bina, &c. inferiora.

A=2.	32	Aqc	plano-solida diagon. ablatitia.
	16	BAqq	
	8	CqAc	
	4	DcAq	
	2	FqqA	

336842 summa auferenda.

2030622 residuum potest. resolv.

E=2.	160	5AqqE	plano-solida gnomonica ablatitia.
	320	10AcEq	
	320	10AqEc	
	160	5AEqq	
	32	Eqc	
	64	B4AcE	
	96	B6AqEq	
	64	B4AEc	
	16	BEqq	
	24	Cq3AqE	
	24	Cq3AEq	
	8	CqEc	
	8	Dc2AE	
	4	DcEq	
	2	FqqE	

2030622 summa plano-solid. auferend. & = residuo potest. resolv.

Divisores seorsim positi.

Quatuordecim particulares divisores juxta tabulam.

80	5Aqq
80	10Ac
40	10Aq
10	5A
32	B4Ac
24	B6Aq
8	B4A
1	B
12	Cq3Aq
6	Cq3A
1	Cq
4	Dc2A
1	Dc
1	Fqq
919884	summa divisorum per quam divide residuum potestatis resolvendæ =2030622, oritur 2.

Si punctum aliquod (in potestate resolvenda) quadrato-cubicum superesset duo latera elicita fungerentur vice unius, pro eductione lateris tertii ut secundi, quemadmodum fit in puris, atque patet ex genesi quadrato-cubi, in cap. 16.

Hactenus A fuit tantum =2; sed in proxima operatione, si opus esset, A esset=22: & proximum reliquum dividendum esset per divisorem ex A = 22, juxta tabulam legitimè conflatum pro E latere singulari tertio.

Visus

Visus est tibi forsan Author noster satis superque obscurus, jam vero proculdubio in gratiam redibit.

In genesi quadrato-cubi adfecti vides me latus (22) in duo nomina divisisse; nempe, A = 20 & E = 2; mox, pro ratione tabulæ, primum posui ex latere primo singulari potestates omnes diagonales in suis quasque sedibus, *scil.* Aqc, Aqq, Ac, Aq, A.

Et pariter in suis locis singularum harum potestatum correspondentia complementa, ut, 5AqqE, &c.

Et quamvis hæc æquatio, Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = 5399042 nullos numeros co-efficientes habere videatur; apposuimus tamen co-efficientes B, Cq, Dc, Fqq, singulis subintelligendo unitates: dein in analysi, ex primo puncto 53 eduximus radicem quadrato-cubicam 2 = A, ex qua inventa confecimus potestates diagonales auferendas è potestate resolvenda, quod & fecimus, restabat 2030622, quo diviso per 919884, divisorem juxta tabulam legitimè conflatum, oriebatur 2 = E lateri secundo, per quod demum gnomonem perfecimus, perfectumque ex residuo subtraximus.

His nostris addit exemplum *Oughtredi* hæc tria:

1. Co-efficientes in majoribus numeris, ut, B = 3, Cq = 16, Dc = 125 & Fqq = 1296, qui si non fuissent figurati, quomodo tamen pro suo quisque genere reputandus jam satis diximus.

2. Unciis auget co-efficientes, ut æquatio obtineat formam ordinis quadrato-cubici in tabula posteriore, ita, Lqc − 5Blqq + 10Cqlc − 10 Dclq + 5Fqql = Gqc; adeo ut tandem co-efficientes sint 15, 160, 1250, 6480; ideoque, omissis unciis, per B intelligit 15, per Cq 160, per Dc 1250, & per Fqq 6480; ac si dixisset,

ſet, ſumatur, ut lubet, B = 15, Cq = 160, &c.

3. Habet etiam & id, exemplum *Oughtredi*, quod ſpecies ſunt alternatim negatæ, ut Lqc—Blqq, &c. ideoque ſignorum magna habenda ratio tum in geneſi tum in analyſi; & in analyſi ubique diligenter obſerventur ſigna, tum pro diagonalibus inter ſe vel à ſe invicem addendis vel ſubtrahendis; tum etiam in diviſoribus conſtituendis, & tandem in gnomone perficiendo; quod me monuiſſe memento, nè aqua hæſerit.

Ubi ad primi exempli reſolutionem veneris in eo primum videbis poteſtatem reſolvendam punctatam, tum ſupra, pro ratione quadrato-cubica; tum infra, prout co-efficientes ſubgraduales (pro graduum in quos ducuntur ratione) poſtulant, ita,

1703	04782		
1	5	—B	co-efficientes ſuis ſedibus locatæ.
1	250	—Dc	
1	60	+Cq	
	6480	+Fqq	

&c.

Quod

Quod ſi habueris exemplum cum pluribus punctis quadrato-cubicis, ita infra punctandum,

. . . . quatuor puncta qc.
4626356712345678
. . . . quatuor puncta qq.
. . . . quatuor puncta cubica.
. . . . quatuor puncta qu.
. . . . quatuor lateralia.

15 —B co-efficientes in ſuis
1250 —Dc locis.
160 +Cq
6480 +Fqq

Nam ſi geneſin obſervaveris, hæc ſunt ipſiſſima loca in quæ affectiones ſubgraduales aggregati (ut ſic dicam) reſolvendi intruſæ fuerunt, (ut mox oſtendemus.) Poteſtates diagonales & reliquæ quæ ſequuntur ſpecies, pro gradus ſui ratione, ſimilem locandi ordinem obſervant; nempe in ſingulis reſervata ſibi ſenioritate ſua.

Jam ſupervacaneum eſt, & vereor nè nimius ſim, ſi te monuerim, 7249920| ablatit. auferendum eſſe è poteſtate reſolvenda, unde reſtat 978|05582, Reſiduum

poteſtatis reſolvendæ, quod per Reſ. ſignificatur, omiſſis reliquis punctis præter hæc prima in ſecunda operatione. Eſtque hoc reſiduum dividendum per diviſorem 10162375, qui conflatur ex octo particularibus diviſoribus affirmativis, 5Aqq, &c. & ſex negativis, —B4Ac, &c. pro latere ſecundo, E=7, eruendo; tum perficitur gnomon ex ſpeciebus affirmativis & negativis, pro 978|05582, ablatit. hoc eſt, numero aufe-

 rendo

rendo ex reſiduo poteſtatis reſolvendæ, unde reſtat o, & analyſis abſolvitur.

Si nimius fuerim, neſcio quo me abreptum Authoris brevitas in contrarium vitium impulerit.

Promiſſorum memor:

eſto radix	$=22=L=A+E$.
ejus quadratum	$=484=Lq=Aq+2AE+Eq$.
cubus	$=10648=Lc=Ac+3AqE$, &c.
quadrato-quad.	$=234256=Lqq=Aqq+4AcE$, &c.
purꝰ quadr-cub.	$=\underline{5153632}=Lqc=Aqc$, &c.
ex his omnibus aditis fiat quadrato-cub. adfec.	$\dot{5}39\dot{9}04\dot{2}$

Dicas, Quomodo ego jam extraham latus hujus quadrato-cubi adfecti (L) =22; quandoquidem ipſum latus 22, una cum aliis poteſtatibus, confuſim in unam ſummam aggregantur, unde omnes quaſi penitus obliterantur?

Reſpondeo, Non tantam eſſe confuſionem quin cogitare poſſis unamquamque poteſtatem in loco ſuo proprio ſub iſta ſumma latêre; ideoque ſi conceperis (22) eſſe radicem binomiam ex A+E, = 20 + 2, facile per geneſin, juxta ſpecies (ex tabula poſteriore) numeris hic appoſitas, loca omnia eorumque rationem noveris, & quo pacto ex retrograda, quæ omnino cernitur compoſitionis via, facienda ſit analyſis.

Hactenus ubique Lectori infantulo præmanſum cibum obtuli; nempe adfirmativarum æquationum faciliimas ſelegi, atque iſtiuſmodi, quæ planiſſimè ad exemplum Authoris viam ſternerent; neque tamen adulti prorſus contemnant methodum qua uſi ſumus vel ob memoriæ

moriæ usum vel saltem rei ipsius summam dignitatem; quandoquidem si tales æquationes plures habuerint adfectiones in superioribus ordinibus, hac planissima methodo, certissimè & infallibiliter, sine hæsitantia, (juxta leges præscriptas, operante arithmetico) resolvantur, ut, Lcc + Lqc + Lqq + Lc + Lq + L = 123, &c.

Imo si species ad terræ centrum pervenerint, inde *Methusalah* aliquis radicem extraxerit.

Nempe quando co-efficientes sunt vel unitates vel in minoribus numeris, vel saltem in non magnis, ut in exemplo Authoris: His præmissis, (ut oportuit) jam ad alia transeamus; namque (fatebor enim) sunt æquationes ut non omnes unius ordinis, ita neque ejusdem facilitatis, quin earum quædam tam densis sub involucris reconditæ, tantum analystæ negotium facessant, tantamque lubricitatem (periculi sane plenam) admittant, ut ars ipsa ad conjecturam declinare quibusdam videatur, ad hujusmodi etiam æquationes jam accedamus.

Quædam æquationes mixtim negantur & affirmantur, in quibusdam co-efficientes sunt valde magni, in aliis ad æquilibrium vergunt, in quibusdam denique suprema potestas est negativa, ut, Blq — Lqc = 123, &c. Et in resolvendo (ad latus primum inveniendum) tribus modis proceditur; 1. extrahendo radicem; 2. dividendo; 3. per reductionem analyticam: Hactenus primo modo solum usi sumus negligendo co-efficientes in extractione singularis lateris primi, juxta primam regularum sequentium quas Author tradidit in sect. 18. pag. 117. ‘ Latus singulare primum elicitur ex his Re-‘ gulis, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. ‘ & 8.

‘ Prima,

'Prima, Si co-efficiens ita longe in posteriora decedit ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omnino poterit.

'Secunda, Si co-efficiens in anteriora prorumpit, sitque affirmativus; devolendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat: per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur: quod etiam in extractione minoris radicis æquationibus ambiguæ intelligi debet.

'Tertia, Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa co-efficientis, pro suo genere, radix.

'Quarta, Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum co-efficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Co-efficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per analyticam multiplicationem) reductus, potestati resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit Ac $\pm$ CqA = Dc, erit Ac = Dc $\mp$ CqA. At si æquationis ambiguæ latus majus quæratur, potestas resolvenda è co-efficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA — Ac = Dc, erit Ac = CqA — Dc, tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem, aliquando per extractionem radicis è co-efficiente; sed plerumque, per reductionem co-efficientis investigatur.

In

In exemplis hactenus à nobis propositis, co-efficientes fuerunt parvi; ideoque per extractionem radicis, è primo puncto potestatis resolvendæ, pro suo genere, (neglectis co-efficientibus) incepimus; verum si co-efficientes (adfirmativo signo donati) fuerint magni, adeoque ut in anteriora proruperint, nempe, si prima figura co-efficientis, in suo loco positi, extenderit ultra primam figuram potestatis resolvendæ, *scil.* ita,

$$Lc + 23456\ L = 46920.$$

. . duo puncta cubica.

potestas resolv. 46920

.. duo puncta lateralia.

23456 co-efficiens in suo loco & in anteriora prorumpens.

Certe in hoc & similibus casibus non incipiendum per eductionem lateris cubici è primo puncto potestatis resolvendæ, *scil.* 46; sed alia via tenenda juxta regulam Authoris secundam, & per modum secundum à nobis propositum, id est, dividendo potestatem resolvendam per co-efficientem, cui divisioni, donec locus fiat, devolvendus est co-efficiens in puncta consequentia, & esto regula perpetua, Quot punctis retrocedet co-efficiens, tot puncta superiora delebuntur.

Exemplum ita stabit,

.

potest. res. 46920 (2.

.

23456 co-efficiens devolutus ꝑ quem dividenda est potestas resolvenda, oritur 2.

Sit

Sit hujus generis alia æquatio,

234234234 L + Lc = 5153163796.

. . . . quatuor puncta cubica.

potest. resolv. 5153163796

. . . . quatuor puncta lateralia.

234234234 co-effic. in suo loco & in anteriora prorumpens.

Potestas resolvenda. 5153163796 (22.

Cq = 234234234 co-efficiens devolutus punctis supra & infra pariter deletis.

Species diagonales ablatit. { 8 Ac jam locus est divisioni, & oritur 2 = A.
468468468 CqA.

Summa ablat. 468469268

Resid. potest. 468471116

12 3Aq }
6 3A } divisores.
234234234 Cq }

234235494 summa divisorum per quam divide residuum per E.

24 3AqE }
24 3AEq } solida gnomonica ablatitia.
8 Ec }
468468468 CqE }

468471116 summa = residuo potest. resolv.

Ratio

Ratio operationis eſt, quia cubus (Lc) in hoc caſu potius adficit quam adficitur; ideoque à nobis ultimo (in æquatione) loco poſitus: quandoquidem cubus (Lc) = 10648 eſt longe minor ſolido ex radice & co-efficiente; ideoque hoc poteſtatem adſectam principalius dividet; & quandoque magnitudo co-efficiens tanto major eſt poteſtate ut hæc ab illa penitus abſorbeatur, ut 2000000 A + Aq = 4000004. Eſto A=2, certe Aq valet tantum 4, at 2000000A valet 4000000, quem ſi dividas per 2000000 neceſſario oritur 2=A; neque plus orietur ſi ad 4000000 addideris 4 =Aq, unde erit 4000004 dividendus: nam quoniam quadratum Aq=4 eſt longe minus co-efficiente, fieri non poteſt ex ejus additione, (ſi dividas per co-efficientem,) fieri (inquam) non poteſt ut plus habeas pro quotiente quam 2, niſi addas ſaltem 2000000 ad 4000000, & tum haberes 3 pro quotiente.

Sed aliud, & id quidem majoris momenti, ex hac regula Authoris ſecunda monendum, nimirum quod quotus ad adfectionis gradum referendus; per gradum adfectionis intelligit gradum magnitudinis quæſitæ (ut L Lq Lc, &c.) in quam co-efficiens ducitur; nam hæc eſt homogeneorum lex, ut ſi exem. gr. ſolidum ex tribus conſtans dimenſionibus dividas per planum, orietur longitudo; ſi per longitudinem, orietur planum: atque hoc eſt analyticè dividere: deſumpſit hoc monitum Author ex conſectario ſecundo, ſectione 8. pag. 114.

‘ Secundum eſt, Si poteſtas reſolvenda per co-effi-
‘ cientem dividatur, quotus ad ipſum affectionis gra-
‘ dum referretur; hoc eſt, quotus erit latus, ſi affectio
‘ ſit ſub latere; vel quadratum, ſi ſub quadrato; & ſic
‘ de

'de reliquis gradibus: Ut in priore æquatione, si
'1703©4782 dividatur per 15, quotus erit quadrato-
'quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per
'1250, quotus erit quadraticus; si denique per 6480,
'quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus,
'sed ipsius plerumque radix pro affectionis gradu, erit
'latus singulare eliciendum.

Esto, 10000 Lq + Lc = 5773824.

$\dot{5}7\dot{7}3\dot{8}24$ poteſt. reſolv.

$\dot{1}0000$ co-efficiens in ſuo loco ante devolutionem.

Punctandum eſſet ita; ſed, ut ſit locus diviſioni, fiat devolutio, ita,

poteſt. $577\dot{3}8\dot{2}4$ (24 radix

co-effic. devolutus $1000\dot{0}$

Tum divide 5 per 1, oritur 5, ſed non ſcribes 5 in quotiente pro latere primo A, ſed ejus latus quadratum 2, ut propria tua ratio dictare poteſt; quia ſi 10000 Lq dividatur per 10000, neceſſario oritur Lq.

Et cubus additus, *ſcil.* Lc, quoniam eſt ſolido minor, hunc operandi modum nihil perturbat.

Idem in altioribus poteſtatibus non difficulter oſtenderem, niſi res eſſet nimis plana ex hoc exemplo.

Tertia regula ſpectat ad æquationes in quibus co-efficientes negativi ſunt adeo magni, ut vel in anteriora prorumpant, vel ſaltem pluribus punctis conſtent quam poteſtas reſolvenda, ut mox explicabimus; monendum autem prius, quod ſi co-efficientes negativi ſint minores, per primam regulam æquationes ejuſmodi reſolvendæ,

ſolvendæ, extrahendo radicem è primo puncto: ut, Lc — Cql = Dc, ſive Lc — 4L = 10560.

. . puncta cubica.

Poteſtas reſolvenda. 10560 (22 radix.

.. tot puncta lateralia quot cubica.

Radix = 22. Extrahe rad. cub. è primo puncto 10, pro A = 2.

4 co-efficiens in ſuo loco.

8 Ac
-8 —CqA } ſpecies diagonal. & —CqA tollend. ex A c, ac ſi cyphræ adſcriptæ fuiſſent ita, 8000 A c
-80—CqA.

Differ. ablat. è pot. reſolv. 792

Reſid. poteſt. reſolv. 2640

12 3Aq
6 3A } diviſores affirmativi.

Summa. 126

-4—Cq, diviſor neg. tollend. ex affir.

1256 differ. diviſorum, per quam divide reſid. poteſt. reſolv. oritur 2.

24 3AqE
24 3AEq
8 Ec } complementa gnomonica adfirmativa.

2648 ſumma compl. adfirm.

-8 —CqE, compl. negat. auferend. ex affirmativis.

Differ. ablatir. 2640 = reſiduo poteſt. reſolvendæ.

Hujuſmodi

Hujusmodi æquationes sunt planæ & faciles, si caute signorum cura habeatur; & ratio est, quia cum co-efficientes sint minores, parum minuunt potestates supremas; ideoque in operando accedunt ad resolutionem potestatum purarum.

Nam in exemplo Lc = 10648, cujus primi puncti latus cubicum pro latere primo est 2; idem, haud minus habeatur, si prius tollatur CqL = 88, restat enim 10560, cujus primi puncti latus cubicum est etiam 2.

Difficultas autem in co-efficientibus negativis, cujus causa regula tertia est instituta, est, quando co-efficiens negatur de potestate ita ut in anteriora prorumpat, vel adeo magnus est, ut pluribus gaudeat punctis co-efficiens pro suo genere, quam potestas resolvenda pro suo.

Enimvero non solum potestas resolvenda punctanda est tum supra tum infra, quum ad operandum perventum, sed prius seorsim in æquatione, punctandi sunt etiam & ipsi co-efficientes infra, ita, Lq — 240 L = 484, quemadmodum in sectione 11. hujus videris, & ubique in exemplis Authoris, nempe, pro sua quisque specie, ut co-efficiens longitudo ita, 15, *scil.* lateralibus punctis; planum ita, 160, quadraticis; solidum ita, 1250, cubicis; plano-planum ita, 06480, quadrato-quadraticis punctis.

Nimirum ut inde innotescat quot sint singulæ figuræ, vel quot binæ, vel quot ternæ, in co-efficiente, respondentes totidem correspondentibus punctis in potestate resolvenda pro suo genere; & vicissim, in hunc finem, ut si plura sint puncta in co-efficiente quam in potestate, inde statuatur majoritas ex parte co-efficientis, ut in exemplo, Lq — 240 L. = 484, quoniam duo sunt tantum quadratica puncta in 484 potest. resolvenda, & tria

lateralia

lateralia in co-efficiente 240 : hinc concludatur planum adficiens 240 L, majus esse potestate resolvenda 484.

Ideo in hoc casu potestatem resolvendam resolutioni præparabis, circulorum numeralium eam multitudinem præponendo mutilæ potestati, ut illa tot puncta habuerit pro suo genere quot co-efficiens habet pro suo; nempe, in exemplo, præpones mutilo quadrato 484, quod idcirco à magistro (artis inventore) acephalum vocatur, (quasi capite truncatum) præpones, inquam, tot cyphras ut illud tot puncta quadratica sibi præfigenda vendicet quot simplices figuras (id est, quot puncta lateralia) habet co-efficiens longitudo; ità,

. . . tria puncta quadratica.
00484
. . . totidem lateralia.
240 co-effic. in suo loco.

Pro resolutione autem potestatis regula est.

Pro latere primo singulari, sumatur ipsa co-efficientis pro suo genere radix.

In præsenti exemplo quadratico, quoniam co-efficiens est longitudo, accipe non radicem, (neque enim radix è longitudine expectanda) sed primam figuram in 240, nempe, 2.

In ordine alio, ut cubico, ubi co-efficiens sit planum, accipe primi puncti latus quadratum pro primo latere.

In ordine quadrato-quadratico, ubi co-efficiens sit solidum, accipe latus cubicum, & in cæteris similiter agendum.

Diximus jam ante processum in primo latere eruendo tribus modis operando suscipiendum, *scil.* extrahendo, dividendo, & reducendo; hic autem apparet primum

modum subdivisionem pati; vel enim extrahis radicem è potestate resolvenda, juxta primam regulam; vel è co-efficiente, juxta hanc tertiam.

Exempl. esto, Lc—Cql=Dc, sive Lc—452L=704.

In hoc exemplo, quoniam duo sunt puncta quadratica in co-efficiente 452, ideo circulus præponetur potestati resolvendæ 704, ut & ibidem etiam sint duo puncta cubica, ita, 0704; at verò, quoniam co-efficiens sublateralis 452, ex duabus constat dimensionibus, non prima figura 4, in 452, sed radix ejus (quippe primi in co-efficiente puncti) quadrata sumetur pro latere primo, *viz.* 2=A; atque hic plane intelligis, quod non proposuimus chimæricum vel inutile figmentum supra, quum diximus co-efficientem reputandum, vel tanquam planum vel solidum pro ordinis sui ratione.

	. .	duo puncta cubica.
22=L. potest. resolv.	0704	
	. .	tot lateralia quot cubica.
	452	co-efficiens in suo loco.
	8	Ac.
	-904	-CqA.
Auferes -104 si addas + 104.	-104	differentia diagonalium auferenda è potest. resolv.
	1744	resid. potest. res.
	12	3Aq } divisores affirm.
	6	3A }
	126	summa divis. affirm.

-452

	-452	-Cq, diviſor negativus auferendus ex affirm.
Differen.	808	diviſor per quem divide reſid. poteſt. oritur 2.
	24	3AqE
	24	3AEq gnom. affirm.
	8	Ec
	2648	ſum.
	-904	-CqE) gnom. negat. tollend. ex gnom. affirm.
Differen.	1744	= reſid. poteſt. reſolv.

Verum enimvero quandoque ita accidit, nimirum hæc eſt mortalium ſors, ut quanquam puncta ſint utrobique æqualia, tamen nequeas elicere latus primum ſive per extractionem radicis, vel è primo puncto poteſtatis, vel parili co-efficientis, ſive dividendo poteſtat. reſolvendam per co-efficientem; ut in hoc exemplo:

$Lq - 60L = 1600$: vera radix eſt 80.

Si dividas 16 per 6 oritur tantum 2: tum quod ad radicem quadratam attinet, ea ex 16 eſt tantum 4: denique, ſi, juxta regulam tertiam, ſumeres primam figuram co-efficientis, (quoniam in hoc exemplo co-efficiens eſt longitudo) ea eſt tantum 6, ſed tu debes habere 8. Quid ergo jam agendum? Eſt quidem hoc negotium ſatis difficile, in quo tamen proculdubio, quicquid ars præſtare poteſt, exhibuit artis analyticæ magiſter, mortalium ingenioſiſſimus, *Vieta.*

$\left\{\begin{matrix} \dot{1}6\dot{0}0 \\ \cdot\,\cdot \\ \underset{\cdot\,\cdot}{60} \end{matrix}\right\}$ puncta æqualia.

Accedamus igitur ad quartam regulam Authoris, in qua in hunc finem instituitur analytica reductio. Quid est autem analytica reductio? Est nihil aliud quam reductio co-efficientis ad idem magnitudinis genus cum potestate resolvenda, quod fit juxta primum Authoris consectarium, sect. 6. pag. 112.

'Si co-efficientis, pro sua specie, radix, ducta in affec-'tionis gradum, multiplicet ipsum co-efficientem; fac-'tus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: ut 'in praecedente aequatione, si latus 15 quadrato-qua-'dratice multiplicatum, ducatur in 15; & si *r* q 160 'cubatum, ducatur in quadratum 160; & si *r* c 1250 'quadratum, ducatur in cubum 1250; denique, si *r* q q '6480 ducatur in quadrato-quadratum 6480; ex sin-'gulis hisce multiplicationibus emerget numerus qua-'drato-cubicus. *Atque haec multiplicatio analytica, 'modus est reducendi co-efficientem quemlibet ad speciem 'potestatis resolvendae,* in lateris primi singularis extrac-'tione usitatissimus.

In praesenti exemplo Lq — 60 L = 1600, quoniam 60 est longitudo, est ipsa radix; & quoniam jungitur cum (L) gradu laterali eatenus invariata manet; sed tum debet saltem multiplicare seipsam, hoc est, quadrari; quod si (in aequatione cubica) junctus fuisset 60 cum Lq, ita, 60 Lq, (ut reducatur:) quoniam 60 est longitudo, nulla radix expectanda, sed mox quadrari debet propter gradum adfectionis (Lq;) & demum, quadratum in co-efficientem ducendum, ut fiat solidum; atque reductio peracta est. Redeamus ad aequationem Lq — 60 L = 1600, erg. per antithesin, Lq = $1\dot{6}0\dot{0}$ + $\dot{6}0$ L.

1600 potest. resolv.
60 co-eff. in suo loco.
36 co-efficiens reduct.
1600 potest. resolv.
5200 summa.

ergo Lq = 5200
L = 8 proxime major quam vera radix quadr. è 52, quæ est 7.
ergo sit A = 8.

Reducendo co-efficientes, non semper pervenies mox ad latus verum, ut in exemplo ad 8, sed plerumque ad proxime verum, ut ad 7.

Præstat etiam hoc artificio analytico uti quandoque etiam in co-efficientibus affirmatis (quanquam illorum gratia haud principaliter inventum) nisi te malles delusum iri; præsertim cum puncta sunt utrobique æqualia, & numeri in primo tum co-efficientis tum potestatis resolvendæ puncto non multum discrepant; i. e. co-efficiens neque multum prorumpit in anteriora, neque multum recedit; quo casu co-efficientes neque magni sunt neque parvi valoris pro natura æquationis, sed magnitudo afficiens ad æquilibrium sive æqualitatem aliquam accedit cum potestate adfecta. Verum in adfirmatè affectis factorum differentia sumatur.

Proponit *Vieta* hoc exemplum,

1 Q + 8 N = 128, sive Lq + 8 L = 128: ordinatis ad opus, ut ars post devolutionem exigit, figuris. Nimirum,

128
8

Quoniam differentia inter planum 128 & 64 quadratum, à co-efficiente 8 est 64, ideo sumetur radix 8.

 Dices,

Dices, Quare ſumis hic differentiam non ſummam, ut ante?

Reſpondeo, Quia ſi $Lq + 8L = 128$.

Erg. per antitheſin, $Lq = 128 - 8L$.

Jam co-efficiens 8, analytice reductus, eſt 64.

Erg. $Lq = 128 - 64$. erg. $L = 8$.

Hoc loco videor mihi te dicentem audire, Quæ ſcripſiſti intelligo; & video te (per reductionem co-efficientis 8, ad planum 64,) ſubſtituiſſe 64 loco 8 L, cum veritate rei & ſucceſſu optato: Ego autem neſcio an hic modus reducendi co-efficientes ubique pariter ſuccedat: puta, in ordine quadrato-cubico; $9\,Ac = Cq\,Ac$; reducatur 9 ad quadrato-cubum juxta conſectarium: ejus radix quadrata 3 cubetur propter gradum adfectionis Ac; fit 27, qui ducatur in 9; fit $243 = Cq\,Ac$, qui eſt quadrato-cubus rationalis ex 3: ſed in æquatione quæ mihi proponatur, nihil ſit neceſſe, ut Ac ſit cubus ejuſdem numeri cujus 9 eſt quadratus; ſed per Ac poteſt intelligi 125, cubus ex 5, qui ductus in 9, efficeret 1125; qui valde excedit 243: ego interim nihilominus procedere debeo analytice reducendo, ut jam eſt expoſitum pro 243, atque ita à veritate longe recedam.

Reſpondeo, Verum eſt, quod co-efficientes reducti rariſſime exprimunt verum valorem magnitudinum quarum loco ſubſtituuntur, ut in his paucis exemplis videris.

Eſto $A = 3$. $Aqq = 81$.

$$Aqq - 2Ac + 16Aq = 171.$$

Erg. per antith. $Aqq = 171 + 2Ac - 16Aq$, reducantur co-efficien. & erit $Aqq = (171 + 16 - 256)$ nib $-$ 69. quod abſurdum.

$Aqq - 2Ac + 9Aq = 108.$
Erg. $Aqq = 108 + 2Ac - 9Aq.$ reducendo co-eff.
Erit $Aqq = (108 + 16 - 81) = 43.$ non consentaneum, quia $Aqq = 81.$

$Aqq - 3Ac + 16Aq = 144.$
Erg. $Aqq = 144 + 3Ac - 16Aq.$ reduc.
Erit $Aqq = (144 + 81 - 256) = -31.$ absurd.

Verum enimvero hic operandi modus per reductionem analyticam, in æquationibus quibus opus est reductione, pro proposito plerunque satis accuratus erit; interim hinc clarissime liquet quid sentiendum de Authoris sect. 7.

Erit, inquam, satis accuratus præsertim post unum aut alterum tentamentum supposito errore, quod (quæso) ne graveris, nisi ingratus audire velles, quandoquidem contentus esse nolis quanquam habes quicquid ars præstare potest; neque enim potes radicem quadratam in communi Arithmetica ex pura potestate educere, quin aliquando (errore facto, eo quod plus vel minus quam par erat sumpsisti) operationem renovare coactus fueris; ita & hic, si (ex diagonalibus computatis, ut decet) habueris numerum potestate resolvenda majorem, certus esse potes, te nimium pro latere primo sumpsisse; ideoque & operationem renovare oportet; atque huc spectant levamina *Oughtredi*, per depressionem & canonem Logarithmorum; cur autem satis accurate plerunque ratio hujus rei est, quod, ut ante dixi in istis casibus, erit æqualitas quædam inter magnitudines; atque ita co-efficiens erit vel radix vel radicis gradus aliquis,

quis, vel ad radicem vel ad gradum aliquem ejus accedet, ut ex co-efficiente reducto numerus emergat vel verus vel ad verum accedens; ex. gr. in exemplo *Vietano*, cujus nuper meminimus, quoniam radix est 8, etiam & co-efficiens est 8, ex 8 in 8 fit 64 exacte; ut & fit ex co-efficiente reducto, est r q 128 — 64 = 8 = accurate magnitudini quæsitæ. Sed dabo aliud exemplum quo non ad proxime minus perveneris.

Lq + 90 L = 11200 (70 = veræ radici.

fiat devolutio, & sit	11200	potest. resolv.
	90	co-effic. in suo loco post devolutionem.
tolle 81 è potest. resolv.	81	co-efficiens reductus
differentia	31	cujus nempe 31 radix quæ est tantùm 5 non proxime minus latere 7 = A.

Hoc tamen dici possit, quod 31 propius accedit ad 36, cujus latus 6, quam ad 25, cujus latus 5.

Instituitur analytica reductio principaliter æquationum ambiguarum causa; & quidem radicis majoris investigandæ gratia; æquatio autem est ambigua quando altissima species est negata, & de duabus saltem exponitur radicibus, (quandoque de pluribus) quarum utraque æquationi satisfaciet; ut in hac æquatione, 370 L — Lq = 9261; æquatio potest explicari vel de 27 radice minore, vel de 343 radice majore: id autem primo & diligenter observandum, quod radices hujusmodi, limites

limites suos sibi è co-efficientibus assignatos habent, intra quos consistant; ut in ordine quadratico radix major, major erit semisse co-efficientis; & radix minor, erit minor: hæc nota sit tibi cynosura, ut in exemplo proposito, 27 minor est quam $\frac{370}{2}$, & 343 major est quam $\frac{370}{2}$.

Ne autem falsitatis præmonstratorem viæ accuses, noveris quod aliquando contigerit æquationem explicari de una radice tanquam duabus, quo casu, semissis co-efficientis erit ipsa radix, ut 12 L — Lq = 36. $\frac{12}{2}$ = 6 est ipsa radix quæsita, cujus 36 est quadr.

In ordine cubico, esto Cql — Lc = Dc quadratum minoris radicis, minus est triente co-efficientis Cq, majoris majus in eodem ordine est Blq — Lc = Dc, una radix minor est duabus tertiis co-efficientis B, altera major.

In ordine quadrato-quadr. est Dcl — Lqq = Fqq, minoris cubus, minor est quadrante co-efficientis solidi D c, majoris major.

In eodem ordine, esto Blc — Lqq = Fqq, unum latus minus est dodrante longitudinis B, alterum majus.

His limitibus præfinitis, certius & facilius procedes in eruendis radicibus; verum aliter longe operandum in radice minore investiganda, aliter in majore; quod ad minorem attinet, operandum pro primo latere, juxta regulam Authoris secundam, per analyticam, analyticam (inquam) divisionem, ut in exemplis Authoris, 9, 11, 13, potestas altissima vocatur avulsa, addita autem potestas lateris singularis primi resolvendæ magnitudini restituit potestatem avulsam, tum homogenea sub gradu, ut in exemplo, 370 L, auferenda est à potestate

ita

ita restituta, pro residuo potestatis resolvendæ.

Proponatur hujusmodi æquatio, 370A—Aq=9261.
vel, 370L — Lq=9261.

Radix = 27. 9261 planum sub latere adfectum multa quadrati.

B= 370 co-efficiens per quem divide 9261, oritur 2 = A primo lateri.

Divide 92 per 37, ut habeas 2 = A. 4 Aq. potestas restituens.

9661 potestas restituta.

740 BA. homogenea sub gradu tollend. è potestate restituta.

2261 resid. potest. resolv. } divisores.
370 B. co-efficiens motus }
—4—2A }

330 differentia divisorum, per quam divide resid. pot. res. oritur 7 = E.

—28—2AE } gnomon quadraticus.
—49—Eq }

2590 BE. gnomon lateralis.

2261 differentia gnom. = resid. potest. res.

Paradigma in hunc modum descripsimus, ut aliquo pacto rationem operationis videres, restituendo potestatem avulsam.

Verum

Verum in idem res recideret hoc modo operando,

9261 planum adfectum.

370 co-effic.

-4 —Aq
740—BA } ſpecies diag.

700 differ. ablatitia.

2261 reſid. poteſt. reſolv.

&c. Eſto aliud exem. 57 L—Lc=24300.

Radix = 30. 24300 ſolidum adfectum multa cubi, BAq—Ac = 24300.

57 co-efficiens in ſuo loco.

3 = A. -27 —Ac
513 CqA } ſpec. diag.

243 differentia ablatitia.

000 reſiduum poteſt. reſolv. unde habetur o = E.

In hoc exemp. analyticè div. 24 per 5 quot. eſt fere 5, cujus radix quadrat. eſt fere 3, ergo ſumis 3 = A, juxta regulam tertiam, neque potuiſti ſumere 4 pro latere primo, tum propter limites præfinitos, qui te impediunt, quin & ad opus redintegrandum inter operandum coactus fueris; radix major eſt 45.

Aliud

Aliud exemplum in ordine quadrato-quadratico: esto 65 Lc—Lqq= 1481544.

Radix = 38.1 1481544 plano-planum adfectum.

B = 65 co-efficiens in suo loco.

Dividendo analyticè 148 per 6, quotiens est 24, qui est fere cubus ex 3, ideo sumis 3 = A.

—81	—Aqq	}	spec. diagon.
1755	BAc	}	
945			differ. ablatitia.
536544			resid. pot. res.
—108	—4Ac	}	divisores neg.
—54	—64Aq	}	
—12	—4A	}	
—11352			summa divis. neg.
1755	B3Aq	}	divis. affirm.
585	B3A	}	
65	B	}	
181415			summa divis. affirm.
67895			differentia summarum per quam divide resid. oritur 8 = E.

—4AcE	—864	}	gnomon. negat.
-64AqEq	—3456	}	
—4AEc	—6144	}	
—Eqq	—4096	}	
	—1275136		summa negat.

14040

14040	B3AqE	gnom. affirm.
37440	B3AEq	
33280	BEc	
1811680	summa affirmat.	
536544	differentia summarum.	

Ablatitia & = residuo plano-plani adfecti, radix major est 57.

Hactenus versati sumus in investiganda radice minore æquationis ambiguæ. Quod attinet ad radicem majorem, ea invenienda triplici methodo: Vel,

1. Dividendo potestatem resolvendam per co-efficientem.

2. Sæpius per extractionem radicis congruæ à co-efficiente, pro suo magnitudinis genere.

3. Utplurimum autem per reductionem co-efficientis analyticam; hic etiam limites attendendi.

Radix = 45.

Esto 57 Lq — Lc = 24300.

	24300		
B =	57		
	—64	—Ac	spec. diagon.
	912	BAq	
	272	differentia auferenda è solid. adfect.	
	—2900	resid. potest. resolv.	

In hoc exemp. divid. 24 per 5, oritur 4 = A. etiam prima figura 5, in longitudine co-efficiente 57, prope accedit, adeo ut utroque modo occurrat.

—48

—48 —3Aq } divis. neg.
—12 —3A }

—492 summ. divis. neg.

456 B2A } divis. affirm.
57 B }

4617 summ. divis. affirmat.

—313 differ. divisorum, per quam divide resid. pot. resolv. oritur 5 = E.

—240 —3AqE }
—300 —3AEq } gnom. neg.
—125 —Ec }

—27125 summa negat.

2280 B2AE } gnom. affirm.
1425 BEq }

24225 summa affirm.

—2900 differ. = resid. pot. resolvendæ.

Quoad radicem minorem, homogenea sub gradu tollitur à potestate restituta; quoad majorem, quandoque, ut in hoc exemplo, & exemplis Authoris, 8, 10, 12, potestas restituta aufertur ab homogenea, sub gradu, quæ facile intelliges, si primum exemplum quoad minorem radicem satis observaveris. Author autem in exemplo ejus octavo numerum 6400 vocat ablatit. qui, quoniam major est quam 4657, è quo tollendus, ideo residuum signo negativo donatur, ità, —17423: sic in exemplo nostro, si tollas differentiam 272 è 243, solido adfecto, id est,

id eſt, majorem numerum è minore, reſtabit, non 29, ſed — 29.

In exemplis Author, 8, 10, 12, per ſecundum modum, (extrahendo radices è co-eff.) latus primum inveſtigat. Verum enimvero quandoque dubitatio accidere poteſt qua via eundum in electione radicis majoris: ideoque & iterum ad reductionem analyticam tanquam ad Apollinem confugimus. Nam ſi ſit Cql — Lc = Dc, ergo per antitheſin Cql — Dc = Lc; unde patet quod poteſtas reſolvenda, Dc, auferenda eſt ex co-efficiente reducto, & differentiæ radix cubica erit = L: quomodo autem co-efficientes reducendi, jam ſatis dictum eſt.

Id unum ſupereſt monendum, quod ad intellectum eſt ſatis facile, ad praxin difficillimum; nempe, quod pro ſecundo latere diviſio analytica quandoque inſtituenda, quam clymacticam appellat *Vieta*; id eſt, quotus erit aliquando latus, aliquando lateris ſecundi quadratus, vel cubus, &c. quia nimirum diviſor conflatus eſt ex multis diviſoribus, quorum unus eſt longitudo, alter planum, alter ſolidum; & nunc unus, nunc alter præpollet & principalius dividit; unde magna oritur lubricitas, quam tamen *Oughtredi* ſagacitas facile effugeret; cujus quidem lubricitatis cauſa, ſi Lector ea quæ ſcripſimus in his ultimis paginis non ſatis bene intelligat, non opus eſt ut ſe nimium torqueat; quoniam ea ſcripta ſunt non tam propter uſum quam operis complementum & ad ſatisfaciendum obſtinati animi curioſitati; qua tamen mente ſi fretus fuerit, poterit ipſum *Vietam* (ex noſtris (uti ſpero) jam magis intelligibilem) conſulere. Spero etiam ex noſtris bene intellectis,

tis, & lectis ſaltem Conicis *Mydorgii*, poſſe Lectorem tuto aggredi *Carteſii* Geometriam practicam, ubi in introitu videbit duarum Algebraicarum regularum pulcherrimam demonſtrationem, & ſubinde mirabiles methodos conſtruendi problemata ad loca quædam, id eſt, figuras geometricas, in quibus jacent & terminantur omnes lineæ, quæ ſimilibus proprietatibus gaudent, juxta æquationum altitudines & conditiones, ſive illæ figuræ ſint circuli ſive parabolæ, &c. ego huc etiam in his oculum direxi; jam vero Portum appello; nam operatio per Logarithmos, ſect. 7. & 26. (iis qui naturam Logarithmorum nôrint) facilior erit intellectu quam ut explicatione indigeat.

F I N I S.
